1. Wstęp

Poniższe notatki mają służyć lepszemu zrozumieniu problemów omawianych na wykładzie i ćwiczeniach. Materiał jest zilustrowany przykładami popularnych modeli ekonomicznych i statystycznych, które mogą być wyestymowane przy użyciu omawianych metod oraz przykładowymi rysunkami stworzonymi za pomocą generatora liczb losowych.

Na końcu większych partii materiału znajdują się odnośniki do standardowych podręczników ekonometrii, w kórych można znaleźć obszerniejsze omówienie poruszanych tematów. Najlepszym z nich, na tym poziomie zaawansowania, jest według mnie podręcznik Stewarda (1991). Niektóre partie materiału najlepiej opisane są w książce Charemzy (1997). Bardziej zaawansowany wykład omawianych tematów można znaleźć w książce Greena (1997). W języku polskim dostępne są jedynie nieco już przestarzałe (szczególnie w partiach dotyczących analizy szeregów czasowych) książki Goldbergera (1972) i Theila (1979) i trudno czytelna książka Chowa (1995).

1. Co to jest model ekonometryczny:

$$\boxed{\text{Rzeczywistość ekonomiczna}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Model ekonometryczny}\\ \text{(uproszczenie rzeczywistości)}\end{array}}$$

Procedura budowy modelu ekonometrycznego składa się z 4 etapów:

1. sformułowania modelu ekonomicznego
2. znalezienia odpowiedniego modelu statystycznego
3. uzyskania odpowiednich danych
4. estymacji modelu za pomocą odpowiedniego oprogramowania statystycznego
5. przetestowania interesujących nas hipotez statystycznych

Przykład 1.1 *(Modelowanie zagregowanej funkcji produkcji)*

1. Model ekonomiczny

Załóżmy, że funkcja produkcji całej gospodarki ma postać Cobba-Douglasa:

$$Q\left(K, L\right) = AL^{\alpha}K^{\beta}$$

Założenie to narzuca kilka ograniczeń na zachowania uczestników rynku:

- *elastyczności produkcji względem ilości zaangażowanego kapitału i pracy są stałe*

$$\frac{\partial Q}{\partial L}\frac{L}{Q} = \frac{\alpha AL^{\alpha-1}K^{\beta}}{AL^{\alpha-1}K^{\beta}} = \alpha$$

$$\frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q} = \frac{\beta AL^{\alpha}K^{\beta-1}}{AL^{\alpha}K^{\beta-1}} = \beta$$

- *jeśli rynek jest doskonale konkurencyjny, to względne udziały kapitału i pracy w dochodzie narodowym są stałe, ponieważ*

$$w = \frac{\partial Q}{\partial L} = \alpha AL^{\alpha-1}K^{\beta}$$

$$r = \frac{\partial Q}{\partial K} = \beta AL^{\alpha}K^{\beta-1}$$

$$\frac{wL}{rK} = \frac{\alpha AL^{\alpha}K^{\beta}}{\beta AL^{\alpha}K^{\beta}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

- *suma wypłacanych czynnikom produkcji jest w takiej sytuacji równa*

$$wL + rK = \left(\alpha + \beta\right)AL^{\alpha}K^{\beta} = \left(\alpha + \beta\right)Q$$

  i aby suma wynagrodzeń czynników równa była produkcji (konsumpcja =produkcji) musi prawdą, że

$$\alpha + \beta = 1$$

warunek ten jest równocześnie warunkiem na to by były stałe przychody skali ponieważ dla funkcji produkcji Cobba-Douglasa warunek na stałe przychody skali

$$Q(\lambda K, \lambda L) = \lambda Q(K, L)$$

zachodzi jedynie dla $\alpha + \beta = 1$

$$Q(\lambda K, \lambda L) = A(\lambda L)^{\alpha} (\lambda K)^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta} A L^{\alpha} K^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta} Q(K, L)$$

2. Model statystyczny

Funkcję produkcji estymujemy na podstawie szeregu czasowego. Model powinien być prawdziwy dla każdej obserwacji:

$$Q_t = A_t L_t^{\alpha} K_t^{\beta}, \quad t = 1, \ldots, T$$

Najwygodniej jest estymować model liniowy względem parametrów. Logarytmując obie strony równania uzyskujemy model

$$q_t = a_t + \alpha l_t + \beta k_t$$

który jest liniowy względem transformowanych zmiennych $a_t = \ln(A_t), l_t = \ln(L_t), k_t = \ln(K_t)$

W rzeczywistości model nas nie opisuje dokładnie rzeczywistości. Stanowi on raczej opis tego jak zwykle zachowuje się produkcja. W praktyce występują różne nieprzewidziane (losowe) zjawiska, które wpływają na produkcje a nie są opisane w naszym modelu (n.p. klęski żywiołowe, błędy w danych itp.). Dlatego też do opisu funkcji produkcji musimy wprowadzić element losowy ε_t*, który opisuje losowe odchylenia produkcji od jej teoretycznej wielkości:*

$$q_t = a_t + \alpha l_t + \beta k_t + \varepsilon_t$$

Właściwości błędu losowego będą stanowiły plus model ekonomiczny będą stanowiły model statystyczny funkcji produkcji. Standardowe założenia dotyczące błędu losowego są następujące:

$\mathrm{E}(\varepsilon_t) = 0$	*średni błąd szacunku wielkości produkcji równy jest zeru*
$\mathrm{E}(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$	*błędy w oszacowaniu wielkości produkcji są nieskorelowane*
$\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$	*wariancja błędu szacunku pozostaje stała w czasie*
$\varepsilon_t \sim N\left(0, \sigma^2\right)$	*błąd szacunku ma rozkład normalny*

Wszystkie te założenia mają charakter techniczny i mogą być uchylone. Jednak modele, w których nie obowiązuje jedno z tych założeń są z reguły znacznie trudniejsze do estymacji.

3. Dane

Dane, które powinniśmy zebrać dotyczą zmiennych k_t, l_t. W odniesieniu do każdej z nich istnieją poważne trudności metodologiczne w interpretacji istniejących danych. Wielkość kapitału produkcyjnego jest zwykle definiowana jako suma wartości księgowych majątku firm w gospodarce narodowej. Jednak wartość księgowa majątku nie odpowiada z reguły faktycznej wartości majątku. Jest na przykład możliwe, że majątek, który jest całkowicie zdeprecjonowany (ma wartość księgową równą 0) jest w dalszym ciągu produktywny. Z kolei w wypadku pracy nie jest jasne jak należy ją mierzyć. Praca wykonywana przez wysoko kwalifikowanego pracownika nie jest tym samym czym praca pracownika niewykwalifikowanego. Teoretycznie ilość pracy powinna być mierzona w przepracowanych przez siłę roboczą godzinach, a nie w ilości pracowników. Jednak dane dotyczące ilości roboczogodzin przepracowanych w gospodarce są trudne do uzyskania. W praktyce poprzestaje się więc na dostępnych danych dotyczących wartości księgowej majątku i ilości pracowników zatrudnionych w gospodarce narodowej.

Osobna kwestia powstaje w przypadku miary postępu technicznego a_t. Ponieważ trudno jest znaleźć obiektywną miarę postępu technicznego można np. założyć, że jest on stały w czasie. Tak więc:

$$a_t = a + bt$$

i ostatecznie nasz model ma następującą formę:

$$q_t = a + bt + \alpha l_t + \beta k_t + \varepsilon_t$$

4, 5. Estymacja i testowanie

Celem estymacji jest znalezienie estymatorów $\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\sigma}$, które stanowią oceny wartości parametrów a, b, α, β, σ. Po wyliczeniu estymatorów (np. za pomocą Excela) możemy zwykle przetestować szereg hipotez statystycznych. Hipotezy te mają na celu ustalenie, czy uzyskane wyniki 'mają sens'.

Pierwszym typem testów są testy na istotność statystyczną parametrów. W naszym przypadku będą to hipotezy: $H_0 : a = 0$, $H_0 : b = 0$, $H_0 : \alpha = 0$, $H_0 : \beta = 0$. Jeśli nie będzie podstaw do odrzucenia tych hipotez, to możemy wnioskować, że albo nasz model jest błędny albo dane, które mamy do dyspozycji są niewstarczające do uzyskania wiarygodnych ocen parametrów.

Innym rodzajem testów są testy, które sprawdzają, czy uzyskane parametry nie są sprzeczne ze 'zdrowym rozsądkiem'. Przykładowo wszyscy zgadzają się, że technika rozwija się w czasie. W związku z tym powinniśmy otrzymać $b > 0$. Jeśli na postawie danych odrzucimy hipotezę $H_0 : b > 0$, to wnioskujemy, że model został błędnie sformułowany lub dane są tak zniekształcone, ze wpływają na sensowność wyniku.

Kolejną hipotezą do przetestowania jest hipoteza o stałych przychodach skali: $H_0 : \alpha + \beta = 1$. Innym rodzajem testu będzie test na zgodność wniosków z wyestymowanego modelu ze tzw. stylizowanymi faktami. Wiadomo z badań empirycznych nad gospodarkami rozwiniętych krajów kapitalistycznych, że praca otrzymuje w formie wynagrodzenia $\frac{2}{3}$ dochodu narodowego, a kapitał $\frac{1}{3}$. W związku z tym, jeśli rynek jest doskonale konkurencyjny, to w przybliżeniu

$$\frac{\alpha}{\beta} \approx \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$$

co można sformułować jako hipotezę statystyczną $H_0 : \alpha - 2\beta = 0$