

6. Asymptotyczne własności MNK

6.1. Własności MNK w dużych próbach

Zajmiemy się teraz cechami asymptotycznymi estymatorów. Jak wiemy, estymator MNK jest równy

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y}$$

z założeń $KMRL$ wynika, że

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$$

co więcej

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon})$$

Założmy teraz, że

$$\lim n^{-1} (\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \mathbf{Q}$$

gdzie \mathbf{Q} jest skończoną macierzą nieosobliwą. Zauważmy, że $\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X}))$ a $\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon} \xrightarrow{D} N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{Q})$. Możemy więc sformułować następujące twierdzenie

Twierdzenie 6.1 *Jeśli spełnione są założenia $KMRL$ i $\mathbf{Q} = \lim n^{-1} (\mathbf{X}'\mathbf{X})$ jest nieosobliwe, to estymator MNK ma asymptotyczny rozkład dany następującym wzorem*

$$\sqrt{n}(\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}) = (n^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} (\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}) \xrightarrow{D} N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{Q}^{-1})$$

Zgodnym estymatorem wariancji estymatora \mathbf{b} jest $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_b = \widehat{\sigma}^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$, i

$$\text{plim } n \left(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_b - \text{Var}(\mathbf{b}) \right) = \mathbf{0},$$

gdzie $\hat{\sigma}^2$ jest dowolnym, zbieżnym estymatorem σ^2 .

Dowód.

$$\sqrt{n}(\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}) = (n^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} (\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}) \xrightarrow{D} N(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{Q}^{-1})$$

przy czym skorzystaliśmy z tego, że $(n^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \xrightarrow{p} \mathbf{Q}^{-1}$, $\frac{1}{\sqrt{n}} (\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}) \xrightarrow{D} \boldsymbol{\eta} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{Q})$ a z twierdzenia Caramera (17.29) wynika, że $\sqrt{n}(\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{D} \mathbf{Q}^{-1} \boldsymbol{\eta} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{Q}^{-1})$ co wynika z własności rozkładu normalnego. ■

Wniosek 6.2 Przy spełnionych założeniach z twierdzenia 6.1 estymator MNK jest estymatorem zgodnym

$$\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta} \xrightarrow{p} \mathbf{0}$$

Dowód.

$$\text{Var}(\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}) = \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{\mathbf{X}'\mathbf{X}}{n} \right)^{-1} \longrightarrow 0 \cdot \mathbf{Q}^{-1} = 0$$

Ponieważ wariancja $\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}$ dąży do zera więc z twierdzenia (17.27) albo bezpośrednio z nierówności Czebyszewa wynika, że $\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}$ dąży według będu średniokwadratowego a więc i według prawdopodobieństwa do zera. ■

6.2. Błędy losowe różne od normalnych - zbieżność do rozkładu normalnego

Zdefiniujmy zmienną $\mathbf{w}_i = \mathbf{x}_i \varepsilon_i$. Dla \mathbf{x}_i nielosowego $E(\mathbf{w}_i) = E(\mathbf{x}_i \varepsilon_i) = \mathbf{x}_i E(\varepsilon_i) = 0$. Ponadto

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{X}' \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \varepsilon_i = \sqrt{n} \left(\frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i}{n} \right) = \sqrt{n} \bar{\mathbf{w}}$$

Jeśli ε_t pochodzi z dowolnego rozkładu o momentach stałych w czasie i $\varepsilon_t, \varepsilon_s$ są niezależne, to także w_t i w_s będą niezależne a

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{X}' \varepsilon = \sqrt{n\bar{w}} \xrightarrow{D} N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{Q})$$

Asymptotycznie estymator b ma rozkład normalny nawet jeśli reszty ε nie mają rozkładu normalnego. W ten sam sposób można dowieść, że twierdzenia 3.6, 3.14, 3.13 są asymptotycznie prawdziwe nawet jeśli reszty nie mają rozkładu normalnego. Wyjątkiem jest tu test prognoz, który asymptotycznie nie jest zgodny jeśli nie jest spełnione założenie o normalności ε . Jest tak dlatego, g może być skończone nawet, gdy $n \rightarrow \infty$.

6.3. Losowe zmienne niezależne - własności estymatora MNK

• Przypadek niezależnych od ε zmiennych objaśniających

W praktyce często nie jest spełnione założenie $KMRL$, które mówi, że zmienne w modelu są nielosowe. Rozważymy dwa przypadki, w których można dowieść, że mimo losowości regresorów estymatory MNK zachowują pożądane własności. Pierwszy przypadek zachodzi, gdy ε i \mathbf{X} są niezależne, co zachodzi wtedy i tylko wtedy, kiedy prawdziwa jest następująca relacja między łączną dystrybuantą $F(\varepsilon, \mathbf{X})$, dystrybuantą warunkową $D_{\varepsilon|\mathbf{X}}(\varepsilon)$ i dystrybuantą brzegową $D_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$:

$$F(\varepsilon, \mathbf{X}) = F_{\varepsilon|\mathbf{X}}(\varepsilon) F_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) \quad (6.1)$$

Niezależność ε i \mathbf{X} implikuje, że licząc warunkowe względem \mathbf{X} wartości oczekiwane, wariacje i rozkłady możemy postępować tak jakby założenia założenia $KMRL$ były spełnione. Inna jest tylko interpretacja uzyskanych wyników. W omawianym przypadku wszystkie uzyskane momenty i rozkłady będziemy interpretować jako rozkłady warunkowe. Na przykład

$$E(b|\mathbf{X}) = \beta + E\left(\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}'\varepsilon \middle| \mathbf{X}\right) = \beta + \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}' E(\varepsilon|\mathbf{X}) = \beta$$

- **Przypadek asymptotycznie nieskorelowanych \mathbf{z} ε zmiennych objaśniających**

Poza własnościami estymatorów w małych próbach interesujące są dla nas także własności estymatorów w dużych próbach. W przypadku rozważania własności asymptotycznych założenie o niezależności można zastąpić słabszym założeniem, że

$$T^{-1} \mathbf{X}' \varepsilon \xrightarrow{p} \mathbf{0} \quad (6.2)$$

Dodatkowo zakładamy, że

$$T^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{X} \xrightarrow{p} \mathbf{Q} \quad (6.3)$$

i \mathbf{Q} jest skończone i nieosobliwe. W takim przypadku

$$\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta} = (T^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} (T^{-1} \mathbf{X}' \varepsilon) \xrightarrow{p} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

i estymator *MNK* jest zgodny (asymptotycznie nieobciążony). Jeśli dodatkowo założymy, że

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{X}' \varepsilon \xrightarrow{D} N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{Q}) \quad (6.4)$$

to będzie można udowodnić następujące twierdzenie:

Twierdzenie 6.3 *Jeśli w modelu spełnione są założenie 2.19 oraz założenia dane wzorami (6.3), (6.2) to estymator MNK jest asymptotycznie zgodny. Jeśli dodatkowo spełnione jest założenie dane wzorem (6.4) to asymptotycznie rozkład estymatora MNK dany jest wzorem:*

$$\sqrt{n} (\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}) = (T^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} (\mathbf{X}' \varepsilon) \xrightarrow{D} \boldsymbol{\eta} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{Q}^{-1})$$

6.4. Testowanie ograniczeń liniowych w dużych próbach

Rozważmy przypadek testowania ogólnej hipotezy liniowej $H\beta = h$

$$\sqrt{n}H(\mathbf{b} - \beta) \xrightarrow{D} H\eta \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 H\mathbf{Q}^{-1}H')$$

Pod warunkiem prawdziwości hipotezy zerowej

$$\sqrt{n}(H\mathbf{b} - h) \xrightarrow{D} H\eta \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 H\mathbf{Q}^{-1}H')$$

Wykorzystując twierdzenie (17.77), otrzymujemy, że

$$\frac{n(H\mathbf{b} - h)'(H\mathbf{Q}^{-1}H')^{-1}(H\mathbf{b} - h)}{\sigma^2} \xrightarrow{D} \chi_g^2$$

W próbach skończonych zastępujemy \mathbf{Q} przez przybliżenie $n^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}$ a σ^2 przez dowolny zbieżny estymator $\tilde{\sigma}^2$. W rezultacie otrzymujemy następujące twierdzenie

Twierdzenie 6.4 *Jeśli spełnione są założenia 2.19, 2.21 oraz założenie 6.4 to hipotezę złożoną $H_0 : H\beta = h$ można testować za pomocą następującej statystyki*

$$\frac{(H\mathbf{b} - h)'(H(X'X)^{-1}H')(H\mathbf{b} - h)}{\tilde{\sigma}^2} = \frac{S_R - S}{\tilde{\sigma}^2} \xrightarrow{D} \chi_g^2 \quad (6.5)$$

gdzie $\tilde{\sigma}^2$ jest dowolnym zbieżnym estymatorem σ^2 .

Wzór ten może nam służyć także jako wzór przybliżony także w małych próbach. Jedną z form testu jest statystyka nR^2 .

Literatura: Steward (1991) str. 110-121, Green (1997) str. 270-288, Goldberger (1972) str. 341-348.