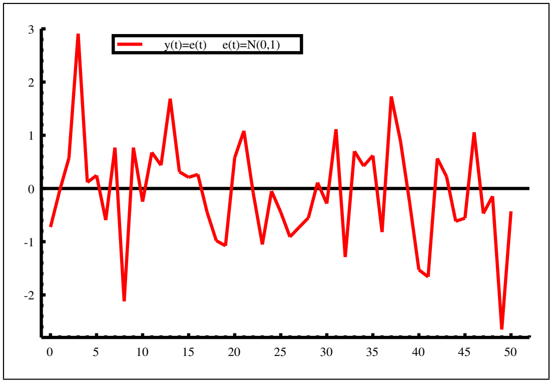
7. Autokorelacja i heteroskedastyczność

7.1. Rodzaje i przyczyny autokorelacji i heteroskedastyczności

Wykres reszt spełniających założenia $KMRL$ pokazano na rysunku 1. Tak zachowujące się reszty nazywamy niekiedy białym szumem (*white noise*) i charakteryzują się one chaotycznym i nieprzewidywalnym zachowaniem.



Rysunek 1: Biały szum

Przypuśćmy, że założenia 2.22 i 2.23 nie są spełnione i macierz wariancji-kowariancji błędu losowego dana jest wzorem

$$\mathrm{Var}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\right) = \sigma^2 \boldsymbol{V}$$

Mówimy, że w modelu występuje:

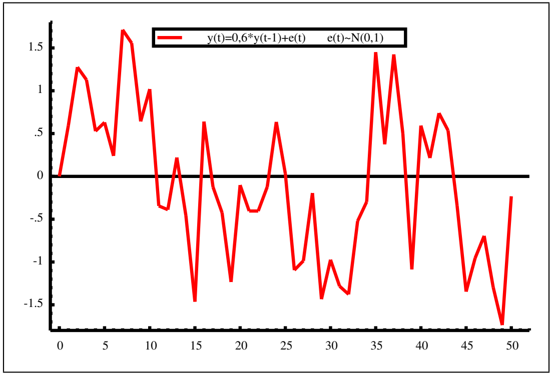
- autokorelacja, gdy
$$\mathrm{E}\left(\varepsilon_i \varepsilon_{j-s}\right) \neq 0 \quad \text{dla pewnych} \quad s \in 1, 2, \ldots$$
- heteroskedastyczność, gdy
$$\mathrm{E}\left(\varepsilon_i^2\right) \neq \mathrm{const}$$

Najczęściej spotykaną formą autokorelacji jest autokorelacja dodatnia. Rysunek 2 przedstawia wykres przykładowy reszt w przypadku występowania takiej autokorelacji. Dodatnio skorelowane zaburzenia losowe nie zachowują się całkowicie chaotycznie. Jeśli w okresie t błąd losowy był dodatni, to prawdopodobieństwo, że w okresie $t+1$ będzie on także dodatni jest wyższe niż prawdopodobieństwo, że w okresie tym będzie on ujemny. Porównując rysunek 2 z rysunkiem 1 zauważmy, że ilość przecięć wykresu z zerem jest mniejsza w przypadku procesu dodatnio skorelowanego. Autokorelacja dodatnia występuje często w modelach szacowanych na szeregach czasowych. Spowodowana jest ona zwykle rozciągnięciem na dłużej niż jeden okres skutków zdarzeń losowych wpływających na poziom zmiennej objaśnianej.

Rzadziej spotykaną formą autokorelacji jest autokorelacja ujemna. W takim przypadku prawdopodbieństwo wystąpienia po dodatnim błędzie losowym ujemnego błędu jest wyższa niż prawdopodobieństwo wystąpienia dodatniego błędu. Proces o takich cechach przedstawiono na rysunku 3. Porównują ten wykres do wykresu nieskorelowanych błędów widzimy, że charakteryzuje się on wyższą ilością przecięć z zerem. Autokorelacja ujemna zdarza się wyjątkowo w modelach ekonomicznych szacowanych na szeregach czasowych.

Autokorelacja może być także spowodowana przyjęciem błędnej postaci funkcyjnej dla estymowanego modelu. Na rysunku 4 pokazano wynik próby dopasowania za pomocą MNK trendu liniowego do funkcji kwadratowej. Dopasowanie to jest słabe ponieważ regresja ta jest błędna z powodu przyjęcia nieprawidłowej formy funkcyjnej modelu. Reszty z takiej regresji charakteryzują się silną dodatnią autokorelacją.

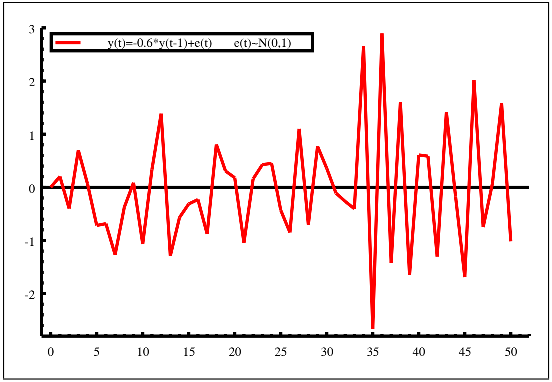
W literaturze omawia się dwie postaci heteroskedastyczności. Pierwsza zachodzi, gdy wariancja



Rysunek 2: Dodatnia autokorelacja

σ_i^2 zależna jest od wielkości pewnej zmiennej $\boldsymbol{x}_i$. Przypadek ten przedstawiony jest na rysunku 5. Na rysunku tym widać jak wraz ze wzrostem $\boldsymbol{x}_i$ wzrosta wielkość odchyleń błędów losowych od zera. Taka forma heteroskedastyczności często występuje w modelach konsumpcji szacowanych na danych danych przekrojowych dotyczących gospodarstw domowych. Pojawia się ona ponieważ bogate gospodarstwa domowe mogą sobie pozwolić na większą swobodę zachowań konsumpcyjnych. Zwykle okazuje się więc, że odchylenie standardowe błędu losowego jest dodatnio skorelowane z poziomem dochodu gospodarstwa.

Innym rodzajem heteskodastyczności jest heteroskedastyczność warunkowa. Występuje ona wtedy, gdy warunkowa wariancja $\mathrm{Var}\left(\varepsilon_t \left| \varepsilon_{t-1}\right.\right) \neq \mathrm{const}$. Rysunek 6 pokazuje błędy losowe charakteryzujące się warunkową heteroskedstycznością. Na rysunku można zauważyć, że okresy o niskiej zmienności błędów losowych przeplatają się z okresami o wysokiej ich zmienności. Typowym

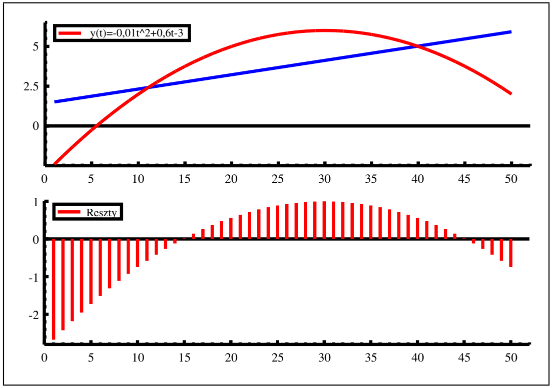


Rysunek 3: Ujemna autokorelacja

przykładem modeli, dla których stwierdza się warunkową heteroskedastyczość są modele szacowane na danych giełdowych. Na rynku papierów wartościowych występują okresy spokoju i niskiej zmienności cen ale także okresy niepokoju i wysokiej zmienności cen.

7.2. Własności estymatorów MNK dla modeli z hetereskodastycznościa lub autokorelacją

Twierdzenie 7.1 *W modelu, w którym* $\mathrm{Var}\,(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\Omega}$ *ale spełnione są założenia 2.19, 2.20, 2.21 estymator* $\boldsymbol{b}_{MNK}$ *jest w dalszym ciągu estymatorem nieobciążonym.*



Rysunek 4: Reszty z regresji trendu na funkcji kwadratowej

Dowód.

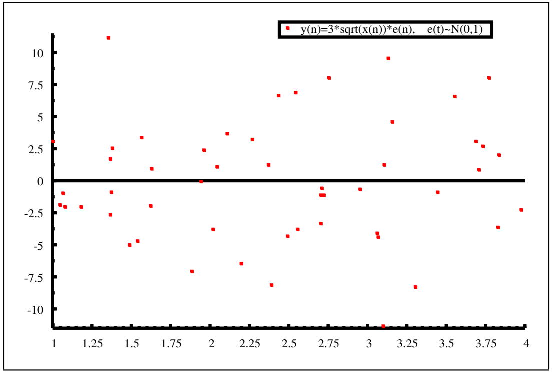
$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\boldsymbol{b}) &= \mathrm{E}\left[\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}\right] = \mathrm{E}\left[\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon}\right] \\ &= \boldsymbol{\beta} + \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'\,\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\beta}\end{aligned}$$

■

Twierdzenie 7.2 *Estymator s^2 wariancji błędu losowego, w przypadku występowania autokorelacji lub heteroskedastyczności, jest estymatorem obciążonym.*

Dowód.

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}) = \mathrm{E}(\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}')) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{M}\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}')) = \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{M}\sigma^2\boldsymbol{V}\right) = \sigma^2\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{V})$$



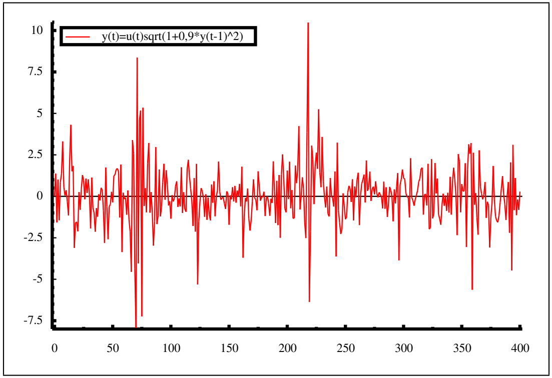
Rysunek 5: Heteroskedastyczność zależna od x_i

gdzie $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'$. Wynika z tego, że

$$\mathrm{E}\left(s^2\right) = \mathrm{E}\left(\frac{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}{n-K}\right) = \sigma^2 \frac{\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{M}\boldsymbol{V}\right)}{n-K} \neq \sigma^2$$

ponieważ $\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{M}\boldsymbol{V}\right) \neq n - K$. ■

Twierdzenie 7.3 *Macierzy wariancji kowariancji* $\boldsymbol{b}$*, w przypadku występowania hetoroscedastyczności lub autokorelacji, jest równa* $\sigma^2\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}$.



Rysunek 6: Warunkowa heteroskedastyczność - proces *ARCH*

Dowód.

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(\boldsymbol{b}) &= \mathrm{E}\left(\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\right) = \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1} \\ &= \sigma^2\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\end{aligned}$$

■

Wniosek 7.4 *Estymator $\boldsymbol{S} = s^2\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}$ jest, w przypadku występowania heteroskedastyczności, obciążonym estymatorem wariancji $\boldsymbol{b}$.*

Wniosek 7.5 *Stosowanie do testowania hipotez standardowych statystyk takich jak statystyka t czy statystyka F w modelu, w którym występuje heteroskedastyczność lub autokorelacja, może prowadzić do błędnych wyników testowania.*

7.3. Testowanie hetorskedastyczności

W tym podrozdziale omówimy testy na istnienie heteroskedastyczności. Zastosowany test powinien zależeć od typu heteroskedastyczności, którego występowanie podejrzewamy. Najprostszym testem służącym do testowania heteskedastyczności jest test Goldfelda-Quandta. Stosujemy go jeśli możliwe jest podzielenie obserwacji na dwie grupy taki sposób, że dla prawdziwej hipotezy alternatywnej, wariancje błędów losowych w tych dwóch grupach są różne. Przykładowo jeśli w modelu wyjaśniającym wydatki gospodarstw domowych podzielimy gospodarstwa na te o niskim dochodzie i te o wysokim dochodzie, to zgodnie z tym co wcześniej powiedzieliśmy wariancja błędu losowego dla gospodarstw o niskim dochodzie powinna być niższa niż dla gospodarstw o wyższym dochodzie. Zaletą testu Goldfelda-Quandta jest to, że jako jedyny z omawianych testów ma rozkład wyprowadzony dla małych prób.

Test Glejsera stosujemy, jeśli znamy postać funkcyjnej zależności między zmiennymi a odchyleniem standardowym błędu losowego. Test Breuscha-Pagana stosujemy jeśli nie jest nam znana ta postać funkcyjna. Jeśli podejrzewamy, że w naszym modelu występuje warunkowa heteroskedastyczność to możemy zastosować test na istnienie autoregresyjnej warunkowej heteroskedastyczności $ARCH$. Jest to test na istnienie najprostszej formy warunkowej heteroskedastyczności. Ostatnim omawianym testem jest test White'a. Przeprowadzając go, nie musimy mieć informacji na temat formy heteroskedastyczności, ma on jednak często niską moc i w przypadku odrzucenia hipotezy zerowej nie sugeruje sposobu w jaki można heteriskedastyczność usunąć z modelu.

- **Test Goldfelda-Quandta**

Pierwszym krokiem przy przeprowadzaniu testu Goldfelda-Quandta jest pogrupowanie obserwacji na dwie rozdzielne podgrupy. Zazwyczaj zakładamy, że ochylenie standardowe zależy wprost proporcjonalnie od pewnej zmiennej, tak że $\sigma_i = \sigma x_{k,i}$, gdzie $\boldsymbol{x}_k$ jest pewną zmienną, co do której podejrzewamy, że wpływa na wielkość wariancji błędu losowego. Podziału dokonujemy sortując obserwacje według wielkości $x_{k,i}$ i dzieląc uzyskaną posortowaną próbę na dwie części przy czym usuwamy tę część[1] obserwacji, dla których wartości $x_{k,i}$ w obu grupach są sobie najbliższe.

	zmienna, według której sortujemy próbę	obserwacje		
	$x_{k,1}$	$\boldsymbol{x}_1$	y_1	
$\downarrow$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	grupa 1 n_1 obserwacji
	x_{k,n_1}	$\boldsymbol{x}_{n_1}$	y_{n_1}	
	x_{k,n_1+1}	$\boldsymbol{x}_{n_1+1}$	y_{n_1+1}	
$\downarrow$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	c odrzucanych obserwacji
	x_{k,n_1+c}	$\boldsymbol{x}_{n_1+c}$	y_{n_1+c}	
	x_{k,n_1+c+1}	$\boldsymbol{x}_{n_1+c+1}$	y_{n_1+c+1}	
$\downarrow$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	grupa 2 n_2 obserwacji
	x_{k,n_1+n_2+c}	$\boldsymbol{x}_{n_1+n_2+c}$	$y_{n_1+n_2+c}$	

Następnym krokiem jest znalezienie reszt dla regresji y_t na $\boldsymbol{X}$ przeprowadzonej dla grupy 1 i grupy 2 z osobna. Jeśli prawdziwa jest H_0, że w modelu nie ma heteroskedastyczności i spełnione są założenia $KMRL$, reszty są niekorelowane, $\frac{\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_1}{\sigma^2}$ i $\frac{\boldsymbol{e}_2'\boldsymbol{e}_2}{\sigma^2}$ są także niekorelowane i mają rozkłady

[1]Nie powinno się usuwać przy tym więcej niż $\frac{1}{3}$ obserwacji.

$\chi^2_{n_1}$ i $\chi^2_{n_2}$. Z twierdzenia 17.81 otrzymujemy, że

$$\frac{\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_1/\left(n_1-K\right)}{\boldsymbol{e}_2'\boldsymbol{e}_2/\left(n_2-K\right)} \sim F\left(n_1-K, n_2-K\right)$$

- **Test Glejsera**

Test Goldfelda-Quandta nie może być stosowany jeśli wariancja błędu losowego zależy od więcej niż jednej zmiennej, ponieważ w takim przypadku nie ma prostego sposobu pogrupowania obserwacji. Test Glejsera możemy stosować, kiedy wiemy jaką fomę funkcyjną może przyjmować heteskedastyczność. Załóżmy, że wektor z_i zawiera zmienne, od których zależy wariancja błędu losowego. W literaturze najczęściej rozważane są trzy przypadki

1. $\sigma_i^2 = \sigma^2\left(1 + \boldsymbol{z}_i\,\boldsymbol{\alpha}\right)$
2. $\sigma_i^2 = \sigma^2\left(1 + \boldsymbol{z}_i\,\boldsymbol{\alpha}\right)^2$
3. $\sigma_i^2 = \sigma^2 \exp\left(\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{\alpha}\right)$

Ponieważ $\boldsymbol{b}$ jest zgodnym estymatorem β nawet wtedy, gdy w modelu występuje heteskedastyczność, więc e_i, i e_i^2 powinny być dobrymi estymatorami odpowiednio ε_i i σ_i^2. Logiczne wydaje się więc, że przeprowadzenie regresji e_i^2 na $\boldsymbol{z}_i$ powinno ujawnić zależność między wariancją błędu losowego i $\boldsymbol{z}_i$. Aby otrzymać estymator $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}$ parametru $\boldsymbol{\alpha}$ powinniśmy odpowiednio dla przypadku 1, 2, 3 przeprowadzić regresje e_i^2, $|e_i|$ i $\ln\left(e_i^2\right)$ na stałej i $\boldsymbol{z}_i$. Hipoteza o braku heteroskedastyczności odpowiada hipotezie $H_0 : \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$. Test na heteroskedastyczność przeprowadzamy przy użyciu statystyki Walda o wzorze

$$W = \widehat{\boldsymbol{\alpha}}'\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\alpha}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\alpha}} \xrightarrow{D} \chi^2_p$$

gdzie $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\alpha}$ jest pewnym estymatorem macierzy wariancji kowariancji estymatora $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}$ a p ilością regresorów zawartych w $\boldsymbol{z}_i$.

- **Test Breuscha-Pagana**

Test Breuscha-Pagana stosujemy jeśli nie wiemy jaką formę funkcyjną przyjmuje heteroskedastyczność ale podejrzewamy, że jest ona dana zależnością

$$\sigma_i^2 = \sigma^2 f\left(\boldsymbol{z}_i \boldsymbol{\alpha}\right)$$

gdzie $f(\cdot)$ jest funkcją ciągłą taką, że $f(0) = 1$ a $\boldsymbol{z}_i$ wektorem zmiennych, o których podejrzewamy, że zależy od nich wariancja. Hipoteza zerowa o homoskedastyczności sprowadza się w tym modelu do hipotez $H_0 : \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.

Statystyka testowa ma postać statystyki mnożników Lagrange'a i $LM = \frac{1}{2}ESS$, gdzie ESS jest wytłumaczoną sumą kwadratów w regresji $\frac{e_i^2}{\widetilde{\sigma}^2}$ na $\boldsymbol{z}$, gdzie e_i^2 są resztami a $\widetilde{\sigma}^2$ estymatorem waiancji czynnika losowego w regresji

$$y_i = \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i$$

Asymptotycznie

$$LM = \frac{1}{2}ESS \xrightarrow{D} \chi_p^2$$

gdzie p jest ilością zmiennych zawartych w $\boldsymbol{z}$. Statystyka ta ma także inną formę

$$LM = nR^2 \xrightarrow{D} \chi_p^2$$

gdzie R^2 jest współczynnikiem determinacji z tej samej regresji regresji reszt $\frac{e_i^2}{\widetilde{\sigma}^2}$ lub też e_i^2 na $\boldsymbol{z}$. Ta forma statystyki testowej jest bardziej odporna na odchylenia rozkładu ε_i od rozkładu normalnego.

- **Testy na istnienie warunkowej heteroskedastyczności**

Warunkowa heteskedastyczność zachodzi, gdy $\sigma_t^2 = \mathrm{E}\left(\varepsilon_t^2 \middle| \varepsilon_{t-1}, \ldots, \varepsilon_{t-s}\right) \neq 0$. Najczęściej rozważanym przypadkiem tego typu heteroskedastyczności jest autoregresyjna warunkowa heteroskedast czność *ARCH*. Zachodzi ona wtedy,

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_s \sigma_{t-s}^2$$

Bazwarunkowa wariancja $\mathrm{E}\left(\varepsilon_t^2\right) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\ldots-\alpha_s} = \sigma^2 = \mathrm{const}$, co oznacza, że warunki twierdzenia Gaussa-Markowa są spełnione i w takim modelu $\boldsymbol{b}_{MNK}$ jest najlepszym *liniowym* i nieobciążonym estymatorem $\boldsymbol{\beta}$. Jednak istnieją w takim przypadku bardziej efektywne od MNK nieliniowe estymatory $\boldsymbol{\beta}$. Estymator macierzy wariancji-kowariancji estymatora $\boldsymbol{b}$ uzyskana za pomocą MNK będzie asymptotycznie zgodny. Problem pojawi się jednak przy prognozowaniu. Jak pokazaliśmy w podrozdziale 2.8, prognoza na okres $T+1$ ma postać $\boldsymbol{x}_{T+1}\boldsymbol{b}$. W standardowym modelu wariancja tej prognozy wynosi $\mathrm{Var}\left(\boldsymbol{x}_{T+1}\boldsymbol{b}\right) = \sigma^2 \boldsymbol{x}_{T+1}' \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1} \boldsymbol{x}_{T+1} + \sigma^2$. Jednak dla modelu o warunkowej heteroskedastyczności wariancja błędu losowego zależy od wariancji tego błędu w poprzednich okresach. Wynika z tego, że

$$\mathrm{Var}\left(\boldsymbol{x}_{T+1}\boldsymbol{b} \middle| \varepsilon_{t-1}, \ldots, \varepsilon_{t-s}\right) = \boldsymbol{x}_{T+1}' \sigma^2 \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1} \boldsymbol{x}_{T+1} + \sigma_{t+1}^2$$

Do oszacownia prawidłowej wariancji prognozy musimy konieczne jest więc sformułowanie także prognozy $\widehat{\sigma}_{t+1}^2$. Szczególnie często warunkowa heteroskedastyczność występuje w szeregach czasowych związanych z danymi finansowymi takimi jak inflacja, przychody na giełdzie itp. Testowanie hipotezy zerowej o braku warunkowej hetoroskedastyczności przeprowadzamy testując łączną istotność $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ w regresji

$$e_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_s e_{t-s}^2$$

Zazwyczaj używa się do tego statystyki LM, którą w tym przypadku można policzyć, licząc statystykę TR^2 opisaną we wniosku 3.12. Dla omawianego testu będzie ona miała asymptotyczny rozkład χ_s^2.

- **Test White'a**

Ostatnim testem na heteskodeastyczność, który omówimy jest test White'a. W przeciwieństwie do wcześniej omówionych testów, test White'a nie wymaga założenia konkretnej formy heteroskedastyczności. Jest to zarówno jego zaletą jak i wadą. Umożliwia on testowanie heteroskedastyczności nawet wtedy, gdy nie mamy żadnego pomysłu na to jaką może ona mieć postać. Z drugiej strony negatywny wynik tego testu nie jest konstruktywny - wskazuje tylko, że w modelu występuje heteroskedastyczność, ale nie daje wskazówki jak tę heteroskedastyczność można usunąć z modelu.

Idea testu White'a opiera się na porównaniu macierzy wariancji kowariancji wektora $\boldsymbol{b}$ uzyskanej z MNK i estymatora White'a[2] macierzy wariancji kowariancji tego wektora. Estymator White'a macierzy wariancji kowariancji wektora $\boldsymbol{b}$ jest estymatorem zgodnym nawet wtedy, gdy w modelu występuje heteroskedastyczność. Z drugiej strony estymator MNK tej macierzy jest estymatorem asymptotycznie obciążonym. Test White'a opiera się na porównywaniu tych dwóch estymatorów przy czym odrzucamy hipotezę zerową o homoskedastyczności jeśli występuje między nimi zbyt duża różnica.

Test White'a przeprowadzamy licząc nR^2 dla regresji e_i^2 na stałej i wszystkich niepowtarzających się iloczynach $x_{s,i}x_{r,i}$, gdzie s, r są indeksami zmiennych. Asymptotyczny rozkład tego testu jest rozkładem chi-kwadrat o p stopniach swobody, gdzie p jest ilością regresorów dla tej regresji poza stałą. čatwo zauważyć, że test White'a jest szczególnym przypadkiem testu Breuscha-Pagana jakkolwiek jego uzasadnienie jest istotnie odmienne.

Test White'a jako ogólny test sprawdzający prawidłowość założeń $KMRL$ jest niekiedy stosowany jako test sprawdzający prowidłowość formy funkcyjnej modelu.

7.4. Testowanie autokorelacji

- **Test Durbina-Watsona**

Jednym z najpopularniejszych testów weryfikujących nieskorelowanie czynników losowych jest test Durbina-Watsona. Statystyka DW jest standardowo umieszczana na wydrukach z wynikami pochodzącymi ze pakietów ekonometrycznych. Podstawową zaletą statystyki DW jej jest prostota i fakt, że istnieją tablice wartości krytycznych dla tej statystyki w próbach skończonych. Jej wadą

[2] Estymator ten zostanie omówiony później w kontekście *UMNK*.

jest to, że ma ona niestandardowy rozkład. Wzór na statystykę DW jest następujący:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{T}\left(e_t - e_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=1}^{T} e_t^2} = \frac{2\sum_{t=1}^{T} e_t^2 - 2\sum_{t=2}^{T} e_t e_{t-1} - e_1^2 - e_T^2}{\sum_{t=1}^{T} e_t^2} \tag{7.1}$$
$$= 2\left(1 - \widehat{\rho}_{\varepsilon_t,\varepsilon_{t-1}}\right) - \frac{e_1^2 + e_T^2}{\sum_{t=1}^{T} e_t^2}$$

gdzie e_t są to resztami z regresji a $\widehat{\rho}_{\varepsilon_t,\varepsilon_{t-1}} = \frac{\sum_{t=2}^{T} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T} e_t^2}$. Zauważmy, że

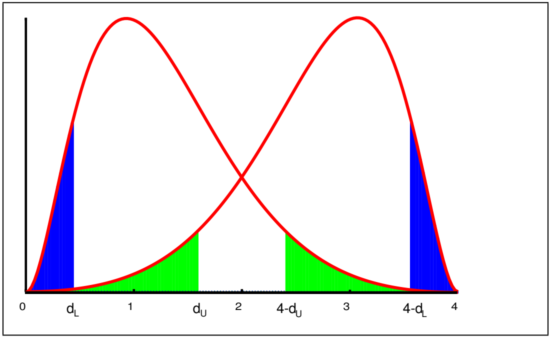
$$DW \xrightarrow{p} 2\left(1 - \rho^2_{\varepsilon_t,\varepsilon_{t-1}}\right) \tag{7.2}$$

gdzie $\rho_{\varepsilon_t,\varepsilon_{t-1}} = \frac{\mathrm{Cov}(\varepsilon_t,\varepsilon_{t-1})}{\mathrm{Var}(\varepsilon_t)}$, ponieważ na mocy centralnego twierdzenia granicznego $\widehat{\rho}_{\varepsilon_t,\varepsilon_{t-1}} \xrightarrow{p} \rho_{\varepsilon_t,\varepsilon_{t-1}}$ a $\frac{e_1^2+e_T^2}{\sum_{t=1}^{T} e_t^2} \xrightarrow{p} 0$.

Sposób testowania za pomocą testu DW zależy od tego, czy dane sugerują dodatnią, czy ujemną autokorelację. Na podstawie wzoru (7.2) widać, że asymptotycznie dla dodatniej korelacji błędów losowych $0 < DW < 2$, a dla ujemnej $2 < DW < 4$. Typowe tablice dla testu DW zawierają wartości krytyczne dla określonych ilości regresorów K i obserwacji T i policzone są przy założeniu, że macierz regresorów $\boldsymbol{X}$ jest nielosowa. Szczególną cechą testu DW jest to, że tablice zawierają dwie wartości krytyczne d_L i d_U. Wnioskowanie statystyczne w przypadku testu DW wygląda następująco:

1. jeśli $DW < 2$
   (a) $DW < d_L$ odrzucamy hipotezę H_0 o homoskedastyczności i przyjmujemy hipotezę o dodatniej autokorelacji
   (b) $d_L < DW < d_U$ brak konkluzji
   (c) $DW > d_U$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 o homoskedastyczności

2. jeśli $DW > 2$
   (a) $DW > 4 - d_L$ odrzucamy hipotezę H_0 o homoskedastyczności i przyjmujemy hipotezę o ujemnej autokorelacji
   (b) $4 - d_U < DW < 4 - d_L$ brak konkluzji
   (c) $DW < 4 - d_U$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 o homoskedastyczności



Rysunek 7: Rozkład testu Durbina-Watsona

Istnienie obszaru, dla którego test nie ma konkluzji wynika z tego, że rozkład statystyki DW zależy od postaci nielosowej macierzy $\boldsymbol{X}$. Wartości krytyczne d_L i d_U są policzone dla takich postaci macierzy $\boldsymbol{X}$, dla których rozkład statystyki DW dla prawdziwej H_0 jest odpowiednio najbardziej przesunięty na lewo i na prawo. Na rysunku 7 naszkicowano takie skrajne rozkłady statystyki DW. Obszary zakreskowane odpowiadają 5% obszarom krytycznym. Załóżmy, ze $DW < 2$. Wtedy obszar między 0 i d_L należy do obszaru odrzuceń dla wszystkich postaci macierzy $\boldsymbol{X}$. Podobnie obszar między d_U i 2 należy zawsze do obszaru przyjęć. Niestety, między wartościami krytycznymi d_L i

d_U istnieje obszar, który należy do obszaru odrzuceń dla jednych postaci macierzy $\boldsymbol{X}$ a dla innych postaci $\boldsymbol{X}$ należy do obszaru odrzuceń. Z tego powodu dla pewnych wartości statystyki DW, test nie daje konkluzji.

Test Durbina-Watsona stosowany jest także w próbach przekrojowych jako test na poprawność formy funkcyjnej modelu. Taka interpretacja testu DW związana jest z tym, że w próbach przekrojowych trudno jest sobie wyobrazić mechanizm, który mógłby spowodować zaistnienie autokorelacji błędów losowych, dotyczących przecież obiektów obserwowanych w tym samym momencie czasu. Jeśli autokorelacja występuje, najprawdopodobniej związana jest z nieprawidłową formą funkcyjną, która generuje systematyczne zmieniające się odchylenia reszt od zera. Sytuacja taka miała miejsce w przypadku zilustrowanym rysunkiem 4. Dla regresji pokazanej na tym rysunku statytyka $DW = 0,017$ czyli znacznie poniżej wartości krytycznej $d_L = 1,324$ uzyskanej z tablic dla $T = 50$ i $K = 1$.

- **Test Breuscha-Godfreya**

Test Durbina-Watsona ma tę wadę, że pozwala jedynie na badanie autokorelacji pierwszego rzędu $\mathrm{E}\left[\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}\right]$. Jakkolwiek może on służyć do wykrywania autokorelacji nawet wtedy, gdy poza autokorelacją pierwszego rzędu występuje autokorelacja wyższych rzędów, to w takim przypadku nie pozwala na bliższą analizę formy autokorelacji. W przypadku, kiedy występuje autkorelacja wyższych rzędów lepiej posłużyć się więc testem Breuscha-Godfreya. Test ten przeprowadzamy badając łączną istotność $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ w regresji

$$e_t = \boldsymbol{x}_t\, \boldsymbol{\mu} + \gamma_1 e_{t-1}, \ldots, \gamma_s e_{t-s}$$

gdzie e_t są resztami z regresji $\boldsymbol{y}$ na $\boldsymbol{X}$. Regresja ta sprawdza, czy niewyjaśniona przez $\boldsymbol{x}_t$ zmienność reszt nie zależy od reszt opóźnionych. Test LM hipotezy zerowej o braku autokorelacji możemy przeprowadzić licząc statystykę

$$TR^2 \xrightarrow{D} \chi^2_s,$$

gdzie s jest założonym rzędem autokorelacji.

7.5. Uogólniona Metoda Najmniejszych Kwadratów

Uogólnioną metodę najmniejszych kwadratów ($UMNK$) stosujemy, gdy nie jest spełnione założenie, że błędy losowe w modelu są homoskedastyczne i nieskorelowane. Powiedzmy, że

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u}, \tag{7.3}$$

$\boldsymbol{X}$ jest nielosowe i $\mathrm{Var}\,(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\Omega} = \sigma^2\boldsymbol{V}$. Ponieważ $\boldsymbol{V}$ jest dodatnio określone więc można znaleźć taką macierz $\boldsymbol{L}$, że $\boldsymbol{L}\boldsymbol{V}\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{I}_n$ i $\boldsymbol{L}'\boldsymbol{L} = \boldsymbol{V}^{-1}$. Jak wcześniej pokazaliśmy, kiedy $\mathrm{Var}\,(\boldsymbol{u}) \neq \sigma^2\boldsymbol{I}$ estymator $\boldsymbol{b}$ jest nieobciążony, ale estymatory σ^2 i $\boldsymbol{S}$ są obciążone.

Estymator $\boldsymbol{b}_{UMNK}$ znajdujemy mnożąc obie strony równania (7.3) przez $\boldsymbol{L}$. Otrzymujemy w ten sposób równanie

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{u} \tag{7.4}$$

Dla tak przekształconego równania błędy losowe są homoskedastycznie i nieskorelowane, ponieważ

$$\mathrm{Var}\,(\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}) = \sigma^2\boldsymbol{L}\boldsymbol{V}\boldsymbol{L}' = \sigma^2\boldsymbol{I}.$$

Estymator $\boldsymbol{b}_{UMNK}$ otrzymujemy traktując $\boldsymbol{L}\boldsymbol{y}$ jako zmienną zależną a $\boldsymbol{L}\boldsymbol{X}$ jako zmienną niezależna i licząc dla tak przekształconych zmiennych estymator MNK

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}_{UMNK} &= \left((\boldsymbol{L}\boldsymbol{X})'(\boldsymbol{L}\boldsymbol{X})\right)^{-1}(\boldsymbol{L}\boldsymbol{X})'\boldsymbol{L}\boldsymbol{y} = \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{y} \\ &= \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{y}\end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}\,(\boldsymbol{b}_{UMNK}) = \sigma^2\left[(\boldsymbol{L}\boldsymbol{X})'(\boldsymbol{L}\boldsymbol{X})\right]^{-1} = \sigma^2\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X}\right)^{-1}$$

Estymator $UMNK$ wariancji błędu losowego liczymy jako

$$s^2_{UMNK} = \frac{(\boldsymbol{L}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{X}\boldsymbol{b}_G)'(\boldsymbol{L}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{X}\boldsymbol{b}_G)}{n - K}$$

i jest łatwo pokazać, że jest on jest nieobciążony. Zauważmy też, że

$$s^2_{UMNK} = \frac{(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{b}_G)' \boldsymbol{V}^{-1} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{b}_G)}{n-K} = \frac{\boldsymbol{e}'_G \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{e}_G}{n-K},$$

gdzie $\boldsymbol{e}_{UMNK} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{b}_{UMNK}$.

Uwaga 7.6 *W ogolnym przypadku estymatory $UMNK$ są niemożliwe do bezpośredniego zostosowania, ponieważ do ich policzenia konieczna jest znajomość nieznanych macierzy $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{V}$ lub $\boldsymbol{L}$. Wykonywalna $UMNK$ polega na zastąpieniu macierzy $\boldsymbol{\Omega}$ jej zgodnym estymatorem $\widehat{\boldsymbol{\Omega}}$. Znalezienie takiego estymatora jest możliwe tylko wtedy gdy na formę $\boldsymbol{\Omega}$ narzucimy pewne ograniczenia. W przypadku, kiedy $\boldsymbol{\Omega}$ nie jest ograniczona, mamy zbyt mało stopni swobody by wyestymować $\boldsymbol{\Omega}$, ponieważ ilość parametrów do oszacowania zawartych w $\boldsymbol{\Omega}$ wynosi $\frac{n(n+1)}{2}$, podczas gdy ilość dostępnych stopni swobody jedynie $n-K$*

Przykład 7.7 *Ważona Metoda Najmniejszych Kwadratów*

Jeśli w modelu występuje jedynie heteroskedastyczność to macierz $\boldsymbol{\Omega}$ ma postać

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} v_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & v_n \end{bmatrix} = \sigma^2 \boldsymbol{V}$$

Załóżmy, że elementy v_i są znane. Dla tego przypadku macierz $\boldsymbol{L}$ ma postać

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{v_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{v_n}} \end{bmatrix}$$

$UMNK$ można traktować jako MNK przeprowadzoną z użyciem przekształconych zmiennych $\boldsymbol{X}^* = \boldsymbol{L}\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{L}\boldsymbol{y}$. W naszym przypadku zmienne te będą miały postać $y_i^* = \frac{y_i}{\sqrt{v_i}}$ i $x_{s,i}^* = \frac{x_{s,i}}{\sqrt{v_i}}$.

Wielkości v_i można interpretować jako wagi przypisywane obserwacjom. Obserwacje o niskiej wariancji błędu losowego mają przypisaną większą wagę a te o wyższej wariancji uzyskują niższą wagę.

Przypuśćmy, że heteroskedastyczność w modelu ma postać $\sigma_i^2 = \sigma^2 z_i^2$, gdzie z_i jest pewną z góry ustaloną zmienną. Heteroskedastyczność o tej formie można wykryć np. za pomocą testu Goldfelda-Quandta z podrozdziału •. W takim przypadku postać macierz wariancji kowariancji ε ma następującą postać

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \begin{bmatrix} z_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \boldsymbol{V}$$

a macierzy $\boldsymbol{L}$ będzie miała postać

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{z_n} \end{bmatrix}$$

W tym przypadku $y_i^* = \frac{y_i}{z_i}$ i $x_{s,i}^* = \frac{x_{s,i}}{z_i}$.

Tego rodzaju przekształcenie stosuje się w ekonometrii bardzo często. Zastanówmy się nad standardową funkcją konsumpcji

$$C_i = a + bY_i + \varepsilon_i,$$

gdzie C_i jest to całkowita konsumpcja w kraju i a Y_i jest poziomem GDP w tym kraju. Jeśli tak sformułowany model oszacujemy na próbie przekrojowej, to prawie napewno wystąpi heteroskedastyczność. Jej powodem będzie nadanie tych samych wag krajom bardzo małym i bardzo dużym. Trudno jest założyć, że dla małych krajów wariancja błędu losowego jest taka sama jak dla dużych krajów. Precyzję oszacowania można mierzyć stosunkiem odchylenia standardowego błędu losowego *do wielkości zmiennej niezależnej $\frac{\sigma}{y_i}$. Wartość dóbr skonsumowanych na Litwie jest około 1000 razy mniejsza niż wartość konsumpcji w USA. Jeśli w oszacowanym modelu relacja $\frac{\sigma}{C_i}$ dla Litwy wynosiłaby 1, to przy założeniu że σ jest stała dla wszystkich krajów, dla Stanów stosunek ten musiałaby wynosić $0,001$. Konsekwencją przyjęcia założenia o homoskedastyczności jest więc przyjęcie założenia, że precyzja oszacowania jest wyższa dla krajów dużych niż dla krajów małych.*

Wydaje się, że bardziej realistyczny w tym przypadku jest model na zmiennych wyrażonych w kategoriach per capita

$$C_i^* = a\frac{1}{z_i} + bY_i^* + \varepsilon_i^*$$

gdzie $C_i^* = \frac{C_i}{z_i}$, $Y_i^* = \frac{Y_i}{z_i}$ a z_i jest ludnością danego kraju. Przekształcenie to jest równoważne zastosowaniu Ważonej Metody Najmniejszych Kwadratów przy założeniu, że odchylenie standardowe błędu losowego jest proporcjonalne do liczby ludności. Zwróćmy uwagę, że stała przy takim przekształceniu zamienia się w zmienną $\frac{1}{z_i}$. Aby uzyskać stałą w modelu przekształconym, w modelu pierwotnym powinniśmy mieć, zamiast stałej, zmienną z_i .

Przykład 7.8 *Dwustopniowa $UMNK$*

Zdarza się, że heteroskedastyczność ma postać zależności funkcyjnej $\sigma_i^2 = f\left(\alpha_0 + z_i\boldsymbol{\alpha}\right)$. Przypadek ten można wykryć za pomocą testów Glejsera i Breuscha-Pagana opisanych w podrozdziałach • i •. Dla modelu, w którym występuje heteroskedastyczność o tej postaci można policzyć estymator $UMNK$ pod warunkiem, że znamy α_0 i $\boldsymbol{\alpha}$. W większości przypadków parametry te są jednak nieznane. W tym przypadku możemy posłużyć się metodą dwustopniową. Jak już wiemy estymator MNK jest nieobciążony i zgodny nawet wtedy gdy w modelu występuje heteroskedastyczność. Intuicyjnie wydaje się uzasadnione, że regresja $f^{-1}\left(e_i^2\right)$ na stałej i z_i da zgodny estymator α_0 i $\boldsymbol{\alpha}$. Dla tak policzonych estymatorów $\widehat{\alpha}_0$ i $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}$ policzyć można wartości teoretyczne $\widehat{\sigma}_i^2 = f\left(\widehat{\alpha}_0 + z_i\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\right)$. Wykonywalna $UMNK$ polega teraz na wystymowania MNK równania

$$y_i^* = x_i^*\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}_i^*,$$

gdzie $y_i^* = \frac{y_i}{\widehat{\sigma}_i}$ *a* $x_{s,i}^* = \frac{x_{s,i}}{\widehat{\sigma}_i}$. *Uzyskany w ten sposób estymator będzie asymptotycznie zgodnym i będzie miał asymptotycznie niższą wariancję niż estymator* MNK *uzyskany z nieprzekształconej regresji.*

Literatura: Steward (1991) str. 147-151, Green (1997) str. 507-509, Chow (1995) str. 103-108, Goldberger (1972) str. 298-312. Theil (1979) str. 244-257.

7.6. Estymacja macierzy wariancji kowariancji metodą White'a

Jak wcześniej wspominaliśmy, estymacja macierzy $\boldsymbol{\Omega}$ bez ograniczeń jest sprawą beznadziejną ze względu na zbyt małą liczbę stopni swobody, którymi dysponujemy. Zauważmy jednak, że do wyestymowania macierzy prawidłowej formy macierzy wariancji-kowariancji estymatora $\boldsymbol{b}_{MNK}$ wystarczy znaleźć estymator macierzy $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{X}$, która ma wymiar $K \times K$. W przypadku, kiedy w modelu występuje jedynie heteroskedastyczność macierz $\boldsymbol{\Omega}$ jest diagonalna i

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{n}\boldsymbol{X}'\,\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{X} = \frac{1}{n}\sum \sigma_i^2 \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i'$$

Pokazano, że dla bardzo ogólnych założeń, zgodnym estymatorem $\boldsymbol{S}$ jest

$$\widehat{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{n}\sum e_i^2 \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i'$$

tak, zgodnym estymatorem wariancji

$$\boldsymbol{\Sigma_b} = \mathrm{Var}\left(\boldsymbol{b}_{MNK}\right) = \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1} = \boldsymbol{\Sigma}$$

jest

$$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{b}} = \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{S}_x\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}$$

Estymator White'a umożliwia zastosowanie estymatora $\boldsymbol{b}_{MNK}$ i policzenie jego macierzy wariancji nawet wtedy, kiedy nie jest możliwe zastosowanie estymatora $\boldsymbol{b}_G$ ze względu na brak wystarczającej ilości ograniczeń narzuconych na $\boldsymbol{\Omega}$.

Literatura: Steward (1991) str. 162, Green (1997) str. 504-505