Copyright by Jerzy Mycielski

8. Metoda Zmiennych Instrumentalnych

8.1. Problem równoczesności w MNK

Przeanalizujmy model

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{u}, \tag{8.1}$$

w którym macierz $\boldsymbol{X}$ zawiera K zmiennych objaśniających, $\mathrm{E}\left(\boldsymbol{u}\right) = \boldsymbol{0}$, $\mathrm{Var}\left(\boldsymbol{u}\right) = \sigma^2\boldsymbol{I}$ a $\operatorname{plim}\left(T^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right.$ $\boldsymbol{Q}$ jest nieosobliwa. Problem równoczesności w takim modelu wystąpi, gdy zmienne objaśniające są skorelowane z odchyleniem losowym:

$$\operatorname{plim}\left(T^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u}\right) = q \neq \boldsymbol{0}$$

W takiej sytuacji

$$\begin{aligned}\operatorname{plim}\boldsymbol{b} &= \operatorname{plim}\left[\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}\right] = \operatorname{plim}\left[\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'\left(\boldsymbol{X\beta}+\boldsymbol{u}\right)\right] = \boldsymbol{\beta} + \operatorname{plim}\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u}\\ &= \boldsymbol{\beta} + \operatorname{plim}\left(T^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\operatorname{plim}\left(T^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u}\right) = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{Q}^{-1}q\end{aligned}$$

z czego wniosek, że w tym przypadku estymator MNK parametru $\boldsymbol{\beta}$ nie jest estymatorem zgodnym.

Zmienne, które spełniają warunek $\operatorname{plim}\left(T^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u}\right) = \boldsymbol{0}$ nazywamy zmiennymi z góry ustalonymi. Zazwyczaj zmiennymi z góry ustalonymi są zmienne egzogeniczne i zmienne endogeniczne opóźnione. Jednak i od tej zasady mogą istnieć wyjątki. Pokazuje to następujący przykład.

Przykład 8.1 *W modelu danym równaniami*

$$\begin{aligned} y_t &= \delta + \phi y_{t-1} + u_t\\ u_t &= \varepsilon_t + \rho\varepsilon_{t-1}\end{aligned}$$

zmienna y_{t-1} nie jest zmienną z góry ustaloną, ponieważ

$$\mathrm{E}\left(y_{t-1}, u_t\right) = \mathrm{E}\left(\delta + \phi y_{t-1} + \varepsilon_{t-1} + \rho\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_t + \rho\varepsilon_{t-1}\right) = \rho\sigma^2 \neq 0$$

8.2. Własności metody zmiennych instrumentalnych

Metoda zmiennych instrumentalnych umożliwia uporanie się z problemem równoczesności[1]. W takiej sytuacji, aby uzyskać zgodny estymator $\boldsymbol{\beta}$ powinniśmy zastosować estymator **M**etody **Z**miennych **I**nstrumentalnych (MZI). Aby zastosować ten estymator musimy znaleźć zawierającą p zmiennych macierz instrumentalnych $\boldsymbol{W}$, to jest zmiennych skorelowanych z $\boldsymbol{X}$ ale nieskorelowanych z zaburzeniami losowymi $\boldsymbol{\varepsilon}$. Macierz $\boldsymbol{W}$ związana ze zmiennymi instrumentalnymi powinna spełniać następujące założenia:

Założenie 8.2 $\operatorname{plim}\left(n^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{\varepsilon}\right) = \mathbf{0}$

Założenie 8.3 $\operatorname{plim}\left(n^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X}\right) = \boldsymbol{Q}_{WX}$ *i* $\operatorname{Rank}\left(\boldsymbol{Q}_{XW}\right) = K$

Założenie 8.4 $\operatorname{plim}\left(n^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W}\right) = \boldsymbol{Q}_{WW}$ *i* $\boldsymbol{Q}_{WW}$ *jest nieosobliwa*

Zbudujmy następującą macierz wartości teoretycznych zmiennych $\boldsymbol{X}$ wygenerowanych z regresji na zmiennych $\boldsymbol{W}$:

$$\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{W}\left(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W}\right)^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}_W\boldsymbol{X} \tag{8.2}$$

gdzie $\boldsymbol{P}_W = \boldsymbol{W}\left(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W}\right)^{-1}\boldsymbol{W}'$. Zauważmy, że macierz $\boldsymbol{P}_W$ jest macierzą symetryczną i idempotentną, ponieważ $\boldsymbol{P}_W'\boldsymbol{P}_W = \boldsymbol{P}_W = \boldsymbol{P}_W'$. Regresja $\boldsymbol{y}$ na wartościach teoretycznych $\widehat{\boldsymbol{X}}$ daje wzór na estymator MZI:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{b}} &= \left(\widehat{\boldsymbol{X}}'\widehat{\boldsymbol{X}}\right)^{-1}\widehat{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{y} = \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_W\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_W\boldsymbol{y} \\
&= \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}\left(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W}\right)^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}\left(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W}\right)^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{y}
\end{aligned} \tag{8.3}$$

[1] W literaturze angielskiej równoczesność określa się terminem *simultaneity*.

Uwaga 8.5 *W macierzy instrumentów mogą pojawiać się zmienne będące równocześnie elementami macierzy $\boldsymbol{X}$ pod warunkiem, że są to zmienne nieskorelowane z $\boldsymbol{\varepsilon}$. Jeśli $\boldsymbol{x}_i$ należy do $\boldsymbol{W}$, to $\widehat{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{x}_i$. Ze wględu na warunek 8.3 ilość zmiennych instrumentalnych musi być większa lub równa ilości zmiennych objaśniających tak, że $p \geq K+1$. Jeśli $p = K+1$ to estymator (8.3) upraszcza się do estymatora:*

$$\widetilde{\boldsymbol{b}} = \left(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{y} \tag{8.4}$$

Twierdzenie 8.6 *Jeśli prawdziwe są założenia 2.19, 2.21 oraz założenia 8.2, 8.3, 8.4 to estymator MZI jest estymatorem zgodnym nawet jeśli* $\operatorname{plim}\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon}\right) \neq 0$

Dowód.

$$\begin{aligned}
\operatorname{plim}\widetilde{\boldsymbol{b}} &= \operatorname{plim}\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}\left(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W}\right)^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}\left(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W}\right)^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{y} \\
&= \boldsymbol{\beta} + \operatorname{plim}\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}\left(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W}\right)^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}\left(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W}\right)^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{\varepsilon} \\
&= \boldsymbol{\beta} + \operatorname{plim}\left(n^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}\left(n^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W}\right)^{-1}n^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}n^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}\left(n^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W}\right)^{-1}n^{-1}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{\varepsilon} \\
&= \boldsymbol{\beta} + \left(\boldsymbol{Q}_{WX}'\boldsymbol{Q}_{WW}^{-1}\boldsymbol{Q}_{WX}\right)\boldsymbol{Q}_{WX}'\boldsymbol{Q}_{WW}^{-1}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{\beta}
\end{aligned}$$

■

Twierdzenie 8.7 *Jeśli prawdziwe są założenia 2.19, 2.21 oraz założenia 8.2, 8.3, 8.4, oraz to wariancja $\boldsymbol{b}_{MZI}$ wynosi*

$$n^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{\varepsilon} \xrightarrow{D} N\left(\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{Q}_{WW}\right), \tag{8.5}$$

to rozkład estymatora MZI jest dany

$$n^{\frac{1}{2}}\left(\widetilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{\beta}\right) \xrightarrow{D} N\left(\boldsymbol{0}, \sigma^2\left(\boldsymbol{Q}_{WX}'\boldsymbol{Q}_{WW}^{-1}\boldsymbol{Q}_{WX}\right)^{-1}\right)$$

przy czym zgodnym estymatorem wariancji kowariancji $\widetilde{\boldsymbol{b}}$ *jest* $\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_b = \widetilde{\sigma}^2 \left(\widehat{\boldsymbol{X}}'\widehat{\boldsymbol{X}}\right)$, *ponieważ*

$$\operatorname{plim} n \left[\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_b - \operatorname{Var}\left(\widetilde{\boldsymbol{b}}\right)\right] = 0$$

gdzie $\widehat{\sigma}^2$ *jest dowlnym zgodnym estymatorem parametru* σ^2.

Dowód. Podobny do dowodu na analogiczne własności asymptotyczne estymatora MNK. ■

Zauważmy, że we wzorze tym występują nieznany parametr σ^2. Można go zastąpić jego zgodnym estymatorem $\widetilde{\sigma}^2$ danym wzorem

$$\widetilde{\sigma}^2 = \frac{\widetilde{\boldsymbol{e}}'\widetilde{\boldsymbol{e}}}{n},$$

gdzie $\widetilde{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widetilde{\boldsymbol{b}}$[2].

Testowanie hipotez złożonych w przypadku MZI wygląda podobnie jak w przypadku MNK. Mówi o tym następujące twierdzenie:

Twierdzenie 8.8 *Dla spełnionych założeń z twierdzenia 8.6 hipotezę zerową* $H_0 : \boldsymbol{H\beta} = \boldsymbol{h}$ *można przetestować za pomocą testu o wzorze*

$$\frac{\left(\boldsymbol{H}\widetilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{h}\right)' \left[\boldsymbol{H}\left(\widehat{\boldsymbol{X}}'\widehat{\boldsymbol{X}}\right)^{-1}\boldsymbol{H}'\right]^{-1}\left(\boldsymbol{H}\widetilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{h}\right)}{\widetilde{\sigma}^2} \xrightarrow{D} \chi^2_g$$

Do testowania także użyć przekształconych sum kwadratów reszt z estymacji MZI*:*

$$\frac{\widetilde{\boldsymbol{e}}'_R \boldsymbol{P}_W \widetilde{\boldsymbol{e}}_R - \widetilde{\boldsymbol{e}}'\boldsymbol{P}_W\widetilde{\boldsymbol{e}}}{\widetilde{\sigma}^2} \xrightarrow{D} \chi^2_g, \tag{8.6}$$

gdzie $\widetilde{\boldsymbol{e}}_R$ *są resztami z modelu z ograniczeniami a* $\widetilde{\boldsymbol{e}}$ *resztami z modelu bez ograniczeń.*

---

[2] Zwróćmy przy tym uwagę, że $\widetilde{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\,\widetilde{\boldsymbol{b}} \neq \ddot{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{y} - \widehat{\boldsymbol{X}}\widetilde{\boldsymbol{b}}$.

Dowód. podobny sposób jak w przypadku MNK. ■

Literatura: Steward (1991) str. 135-144, Green (1997) str. 288-295, Chow (1995) str. 139-140, Goldberger (1972) str. 364-367.

8.3. Testowanie egzogeniczności

Z powyższych rozważań wynika, że egzogeniczność jest założeniem, którego prawdziwość ma kapitalne znaczenie dla poprawności wynikiów estymacji. Jest to założenie, które można testować. Poniżej padamy dwa testy, którymi można się posłużyć do testowania egzogeniczności zmiennych oraz do testowania prawidłowości zastosowanych w procesie estymacji intrumentów

- **Test na egzogeniczność Hausmana**

Test Hausmana można przeprowadzić, jeśli mamy dwa estymatory o następujących właściwościach

1. jeśli H_0 jest prowdziwa to $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ jest zbieżny a $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}$ jest asymptotycznie efektywny
2. jeśli H_0 jest fałszywa jest to $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ jest dalej zbieżny, ale $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}$ jest asymptotycznie obciążony

Test Hasumana polega na sprawdzeniu, czy oszacowania parametrów uzyskanych za pomocą estymatora $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ i $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}$ są do siebie zbliżone. W naszym przypadku H_0 brzmi, że $\boldsymbol{X}$ jest egzogeniczne. W takim przypadku rolę estymatora $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ pełni estymator MZI a estymatora $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}$ estymator MNK. Jeśli H_0 jest prawdziwe i $\boldsymbol{X}$ jest ogzogeniczne to łatwo pokazać, że

$$\sqrt{n}\left(b_{MZI} - b_{MNK}\right) \xrightarrow{D} N\left(0, \boldsymbol{\Sigma}_{b_{MZI}-b_{MNK}}\right)$$

co oznacza, że statystyka

$$\left(b_{MZI} - b_{MNK}\right)' \left(\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b_{MZI}-b_{MNK}}\right)^{-1} \left(b_{MZI} - b_{MNK}\right) \xrightarrow{D} \chi^2_g$$

gdzie g jest ilością zmiennych, których egzogeniczność badamy.

Zauważmy, że w teście tym sprawdzamy, czy obciążenie estymatora MNK jest równe zeru. Rozważmy regresję

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \widehat{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{8.7}$$

gdzie $\widehat{\boldsymbol{X}}$ są wartościami teoretycznymi $\boldsymbol{X}$ wygenerowanymi za pomocą instrumentów $\boldsymbol{W}$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{\gamma}} &= \left(\widehat{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{M}_X\widehat{\boldsymbol{X}}\right)^{-1}\widehat{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{M}_X\left(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}\right)\\
&= \left(\widehat{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{M}_X\widehat{\boldsymbol{X}}\right)^{-1}\widehat{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{M}_X\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \left(\widehat{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{M}_X\widehat{\boldsymbol{X}}\right)^{-1}\widehat{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{M}_X\boldsymbol{\varepsilon}\\
&= \left(\widehat{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{M}_X\widehat{\boldsymbol{X}}\right)^{-1}\widehat{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{\varepsilon} + \left(\widehat{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{M}_X\widehat{\boldsymbol{X}}\right)^{-1}\widehat{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon}
\end{aligned}$$

Jeśli hipoteza zerowa o egzogeniczności $\boldsymbol{X}$ jest prawdziwa, to zarówno $\widehat{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{\varepsilon}$ jak i $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon}$ dążą do zera co implikuje, że $\operatorname{plim}\left(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}\right) = \mathbf{0}$. Jeśli jednak hipoteza o egzogeniczności jest fałszywa to $\operatorname{plim}\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon}\right) \neq \mathbf{0}$ i w konsekwencji także

$$\begin{aligned}
\operatorname{plim}\left(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}\right) &= \operatorname{plim}\left(\left(\widehat{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{M}_X\widehat{\boldsymbol{X}}\right)^{-1}\widehat{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon}\right)\\
&= \operatorname{plim}\left(\left(\widehat{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{M}_X\widehat{\boldsymbol{X}}\right)^{-1}\widehat{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{X}\right)\operatorname{plim}\left(\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon}\right)\\
&= \boldsymbol{Q}\left(\operatorname{plim}\left(\boldsymbol{b}\right) - \boldsymbol{\beta}\right) \neq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

gdzie $\boldsymbol{Q} = \operatorname{plim}\left(\left(\widehat{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{M}_X\widehat{\boldsymbol{X}}\right)^{-1}\widehat{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{X}\right)$. W efekcie łatwym do policzenia wariantem testu Hausmana na egzogeniczność jest procedura polegająca na testowaniu hipotezy $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$ w modelu 8.7.

- **Test na poprawność intrumentów Sargana**

Innym testem związanym z egzogenicznością jest test na poprawność intrumentów Sargana. Zauważmy, że

$$\widetilde{\boldsymbol{e}} = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_W\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_W\right)\boldsymbol{\varepsilon}$$
$$\boldsymbol{P}_W\widetilde{\boldsymbol{e}} = \left(\boldsymbol{P}_W - \boldsymbol{P}_W\,\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_W\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_W\right)\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{M}_W\boldsymbol{\varepsilon}$$

čatwo sprawdzić, że $\boldsymbol{M}_W$ jest macierzą idempotentną i $\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{M}_W\right) = p - K$. Jeśli prawdziwe założenie H_0, że instrumenty są nieskorelowane z błędami losowymi, to

$$\frac{\widetilde{\boldsymbol{e}}'\boldsymbol{P}_W\widetilde{\boldsymbol{e}}}{\widetilde{\sigma}^2} \xrightarrow{D} \chi^2_{p-K}$$

Statystyka ta może służyć do badania prawidłowości doboru zmiennych instrumentów.

Literatura: Steward (1991) str. 144-146, Green (1997) str. 443-444.