11. Modele Wielorównaniowe

Formę strukturalną modelu o G równaniach można zapisać w następującej postaci

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_t + \boldsymbol{u}_t, \tag{11.1}$$

gdzie $\boldsymbol{Y}_t = [y_{1t}, \ldots, y_{Gt}]'$, $\boldsymbol{X}_t = [x_{1t}, \ldots, x_{Kt}]'$, $\boldsymbol{u}_t = [u_{1t}, \ldots, u_{Gt}]'$ i $\mathrm{E}(\boldsymbol{u}_t) = \boldsymbol{0}$, $\mathrm{Var}(\boldsymbol{u}_t) = \boldsymbol{\Sigma}$[1] a $\mathrm{E}(\boldsymbol{u}_t\boldsymbol{u}_s) = \boldsymbol{0}$ dla $t \neq s$. O $\boldsymbol{Y}_t$ mówimy, że jest wektorem zmiennych endogenicznych a o $\boldsymbol{X}_t$ zakładamy, że wektorem zmiennych z góry ustalonych, to jest nieskorelowanych z odchyleniem losowym $\boldsymbol{u}_t$. O macierzach $\boldsymbol{A}_{G\times G}$ i $\boldsymbol{B}_{G\times K}$ zakładamy, że mają pełen rząd wierszowy G. Często spotyka się następującą znormalizowaną formę stukturalną

$$\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}_t + \boldsymbol{D}\boldsymbol{X}_t + \boldsymbol{\epsilon}_t, \tag{11.2}$$

gdzie $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}_D^{-1}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}_D)$, $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}_D^{-1}\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{\epsilon}_t = \boldsymbol{A}_D^{-1}\ \boldsymbol{u}_t$, gdzie $\boldsymbol{A}_D$ jest macierzą diagonalną zawierającą na przekątnej elementy diagonalne macierzy $\boldsymbol{A}$. Forma ta powstaje w wyniku takiego przekształcenia formy (11.1), że po prawej stronie kolejnych równań stoją kolejne zmienne endogeniczne, a po prawej zmienne endogeniczne i z góry ustalone, inne od zmiennej stojącej po prawej stronie równania. Formę (11.2) tworzy się w takim sposób, by każde z równań było intepretowalne w punktu widzenia teorii ekonomii (na przykład było funkcją konsumpcji).

Forma zredukowana tego modelu (11.1) powstaje przez lewostronne pomnożenie (11.1) przez $\boldsymbol{A}^{-1}$:

$$\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_t + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{u}_t$$

Jeśli zdefiniujemy macierz $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ i zaburzenie losowe $\boldsymbol{\varepsilon}_t = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{u}_t$, to otrzymaną formę zredukowaną można zapisać jako

$$\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{X}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{11.3}$$

[1] Macierz Σ nie musi być diagonalna, ponieważ dla zaburzenia losowe dla różnych równań mogą być wzajemnie skorelowane.

Najważniejszą cechą formy zredukowanej jest, to że w poszczególnych równaniach po prawej stoi jedna, różna dla każdego z równań, zmienna endogeniczna, a po prawej stronie każdego z równań znajdują się jedynie zmienne egzogeniczne.

11.1. Identyfikacja

Model (11.1) pomnożymy lewostronnie przez nieosobliwą macierz $\boldsymbol{F}_{G\times G}$ to otrzymamy następujący model

$$\boldsymbol{FAY}_t = \boldsymbol{FBX}_t + \boldsymbol{Fu}_t, \tag{11.4}$$

który można także zapisać jako

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{X}_t + \boldsymbol{u}_t^* \tag{11.5}$$

Zauważmy, że model (11.4) ma identyczną formę zredukowaną, a tym samym i funkcję wiarygodności, co model 11.1. Oznacza to, że na podstawie danych nie ma sposobu, by stwierdzić, który z tych dwóch modeli jest lepszy. Po to, by uzyskać jednoznaczne oszacowania musimy nałożyć takie ograniczenia na macierze parametrów $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$, że $\boldsymbol{A}^*$ i $\boldsymbol{B}^*$ spełnianią je jedynie dla $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}$, tak że $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}^* = \boldsymbol{B}$. Równanie w modelu nazywamy zidentyfikowanym jeśli z ograniczeń nałożonych na formę strukturalną wynika, że parametry tego równania znajdujące się w macierzach $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^*$ i $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}^*$ są sobie równe.

Istnieją następujące metody stwierdzania czy dane równanie jest zidentyfikowane.

- Formalna metoda $\boldsymbol{F}$. Sprawdzamy j-tego wiersza macierzy $\boldsymbol{F}$, czy równania, $\boldsymbol{f}_j\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_j^*$ i $\boldsymbol{f}_j\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_j^*$ imlikują, że $\boldsymbol{f}_j$ jest j-tym wierszem macierzy jednostkowej, przy czym $\boldsymbol{A}_j^*$ i $\boldsymbol{B}_j^*$ są dowolnymi K elementowymi i G elementowymi wektorami parametrów, spełniającymi ograniczenia nałożone na parametry j-tego równania formy strukturalnej.
- Rozwiązywanie równań na parametry formy strukturalnej. Jeśli z równań $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ da się uzyskać jednoznacznie parametry i-tego równania to model jest dokładnie zidentyfikowany. Jeśli uzyskujemy nieskończenie wiele rozwiązań, to i-te równanie nie jest zidentyfikowane.

Jeśli uzyskujemy kilka sprzecznych rozwiązań dla parametrów i-tego równania, to równanie jest przeidentyfikowane.

- Warunki rzędu i wymiaru (przypadek ograniczeń zerowych). Zapiszmy j-te równanie formy strukturalnej jako
$$\boldsymbol{A}_j \boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{B}_j \boldsymbol{X}_t + \boldsymbol{u}_t,$$
Założmy, że w równaniu tym nie występuje część zmiennych endo i egzogenicznych tak, że przy pewnym uporządkowaniu $\boldsymbol{Y}_t$ i $\boldsymbol{X}_t$ mamy, że $\boldsymbol{A}_j = [1, \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{0}]$, $\boldsymbol{B}_j = [\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{0}]$. Oznaczny jako K_j ilość zmiennych engzogenicznych w j-tym równaniu a jako G_j ilości zmiennych endogenicznych w tym równaniu, przy czym do G_j wliczamy także zmienną stojącą po lewej stronie równania. Wymiar wektora $\boldsymbol{\beta}_j$ jest równy K_j a wektora $\boldsymbol{a}_j$ jest równy $G_j - 1$. Zdefinijmy
$$\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = \left[\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{a}_j & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\beta}_j & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_a & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{B}_\beta & \boldsymbol{B}_0 \end{array}\right]$$
Z wcześniejszych rozważań wynika, że równie j będzie zidentyfikowane, jeśli $\boldsymbol{U}_j = \boldsymbol{f}_1 \boldsymbol{U}$ implikuje, że $\boldsymbol{f}_1 = [f_{10}, \boldsymbol{f}_{11}] = [1, 0, \ldots, 0]$. Będzie to prawdą jeśli $\boldsymbol{f}_{11} [\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{B}_0] = 0$ jedynie dla $\boldsymbol{f}_{11} = 0$, co jest prawdą wtedy i tylko wtedy gdy macierz $[\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{B}_0]$ ma rząd równy $G-1$. Warunek konieczny sprawdzamy więc tworząc macierz $[\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{B}_0]$ złożona z tych kolum macierzy $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$, o których na podstawie formy strukturalnej wiemy, że w j-tym wierszu mają 0. Aby j-te równanie było zidentyfikowane rząd tej macierzy musi być równy $G - 1$. Ilość kolumn tej macierzy będzie równa ilości zmiennych endogenicznych i z góry ustalonych, które nie występują w danym równaniu. Ich ilość jest więc ona równa $G - G_j + K - K_j$. Ponieważ warunkiem koniecznym by rząd analizowanej macierzy był równy $G - 1$ jest, by ilość jej kolumn była większa lub równa $G - 1$ więc w efekcie otrzymujemy następujący warunek konieczny dla identyfikacji j-tego równania
$$G - G_j + K - K_j \geq G - 1$$

upraszczając otrzymujemy, że

$$K \geq G_j + K_j - 1$$

Przykład 11.1 *Jednym z pierwszych wyestymowanych modeli wielorównaniowych był model gospodarki Stanów Zjednoczonych w latach* $1921 - 1941$ *stworzony przez Kleina. Składa się on z następujących równań*

$$\begin{array}{ll}
C_t = \alpha_1 + \alpha_2 P_t + \alpha_3 P_{t-1} + \alpha_4 \left(W_t + W_t'\right) + u_{1t} & \textit{konsumpcja} \\
W_t = \gamma_1 + \gamma_2 X_t + \gamma_3 X_{t-1} + \gamma_4 t + u_{3t} & \textit{płace w sektorze prywatnym} \\
I_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 P_{t-1} + \beta_4 K_{t-1} + u_{2t} & \textit{inwestycje} \\
K_t = I_t + K_{t-1} & \textit{wielkość kapitału} \\
X_t = C_t + I_t + G_t & \textit{równanie dochodu narodowego} \\
P_t = X_t - W_t - T_t & \textit{zyski w sektorze prywatnym}
\end{array}$$

Zmiennymi endogenicznymi w tym modelu jest konsumpcja C_t*, płace w sektorze prywatnym* W_t*, inwestycje* I_t*, wielkość kapitału w gospodarce* K_t*, produkt narodowy* X_t *oraz zyski w sektorze prywatnym* P_t*. Zmiennymi egzogenicznymi w tym modelu są stała, trend liniowy* t*, wydatki rządowe* G_t*, płace w sektorze państwowym* W_t'*, podatki* T_t *oraz zmienne opóźnione* P_{t-1}*,* K_{t-1}*,* X_{t-1}*. W pierwszym równaniu zagregowana konsumpcja wyjaśniona jest przez zyski, zyski opóźnione i łączne płace w sektorze prywatnym i państwowym. Osobne potraktowanie zysków w tym rówaniu wynika z tego, że krańcowa skłonność do konsumpcji z tego rodzaju dochodu jest niższa niż z dochodu z pracy - jest to prawdopodobnie wynikiem faktu, że znaczące dochody z kapitału osiągają ludzie zamożniejsi. Płace w sektorze prywatnym zależą od wartości produktu w tym sektorze oraz podlegają trendowi liniowemu. Kapitał równy jest kapitałowi z zeszłego okresu plus inwestycje w danym okresie. Wartości dochodu narodowego równa jest wydatkom na kosumpcje, inwestycje i pozapłacowe wydatki rządowe. Z kolei zyski w sektorze prywatnym równe są wartości produktu minus wydatki na płace i podatki. Zauważmu, że model ten różni się klasycznego modelu* IS/LM*, ponieważ nie ma w nim zmiennych związanych z sektorem pieniężnym takich jak ilość pieniądza, czy* *stopy procentowe. Współczynniki w tym modelu można zapisać w postaci następującej tabeli:*

	$\boldsymbol{A}$						$\boldsymbol{B}$							
	C_t	W_t	I_t	K_t	X_t	P_t	W_t+W_t'	G_t	T_t	K_{t-1}	X_{t-1}	P_{t-1}	1	t
C_t	-1	0	0	0	0	α_2	α_4	0	0	0	0	α_3	α_1	0
W_t	0	-1	0	0	γ_2	0	0	0	0	0	γ_3	0	γ_1	γ_4
I_t	0	0	-1	0	0	β_2	0	0	0	β_4	0	β_3	β_1	0
K_t	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
X_t	1	0	1	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
P_t	0	-1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0

Przykład 11.2 *Sprawdźmy najpierw za pomocą metody bezpośredniej metody F, czy równanie konsumpcji jest zidentyfikowane. Mnożąc macierze $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ przez $\boldsymbol{f} = [f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6]$ uzyskujemy następujące równania*

$$\begin{aligned} & & f_1\alpha_4 &= \alpha_4^* \\ -f_1+f_5 &= -1 & f_5 &= 0 \\ -f_2-f_6 &= 0 & -f_6 &= 0 \\ -f_3+f_4+f_5 &= 0 & f_3\beta_4+f_4 &= 0 \\ f_4 &= 0 & f_2\gamma_3 &= 0 \\ f_2\gamma_2-f_5+f_6 &= 0 & f_1\alpha_3+f_3\beta_3 &= \alpha_3^* \\ f_1\alpha_2+f_3\beta_2-f_6 &= 0 & f_1\alpha_1+f_2\gamma_1+f_3\beta_1 &= \alpha_1^* \\ & & f_2\gamma_4 &= 0 \end{aligned}$$

Z równań tych natychmiast widać, że $f_4 = f_5 = f_6 = 0$. Z pierwszego równania po lewej stronie wynika, że $f_1 = 1$ a z drugiego i trzeciego, że $f_2 = f_3 = 0$. Tak więc istotnie jedynym wektorem $\boldsymbol{f}$ dla którego $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{f}\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{B}^* = \boldsymbol{f}\boldsymbol{B}_1$ spełniają ograniczenia narzucone na $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jest wektor $\boldsymbol{f} = [1,0,0,0,0,0]$. Zbadajmy teraz, warunki rzędu i wymiaru dla równania płac. Macierz $[\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{B}_0]$

ma w tym przypadku postać

	$\boldsymbol{A}_0$				$\boldsymbol{B}_0$				
	C_t	I_t	K_t	P_t	$W_t + W_t'$	G_t	T_t	K_{t-1}	P_{t-1}
C_t	-1	0	0	α_2	α_4	0	0	0	α_3
I_t	0	-1	0	β_2	0	0	0	β_4	β_3
K_t	0	1	-1	0	0	0	0	1	0
X_t	1	1	0	0	0	1	0	0	0
P_t	0	0	0	-1	0	0	-1	0	0
			$\uparrow$		$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	

zauważmy, że jeśli $\alpha_4 \neq 0$ *i* $\beta_4 \neq 0$, *to kolumny wskazane strzałkami macierzy tworzą macierz nieosobliwą. Oznacza to, że* $\mathrm{Rank}\,[A_0, B_0] = 5$ *i warunek dostateczny do identyfikacji równania płac jest spełniony. Analizując warunki konieczne można stwierdzić, że dla wszystkich równań modelu są one spełnione, ponieważ* $K = 8$ *a* $K_i + G_i - 1$ *nie nigdy większe od* 4.

11.2. Metody estymacji

Zazwyczaj interesują nas wyłącznie parametry parametry formy strukturalnej (11.2) a nie formy zredukowanej (11.3). Dzieje się tak dlatego, że forma strukturalna tworzona jest na podstawie teorii ekonomii i poszczególne jej parametry mają interpretację ekonomiczną. Forma zredukowana dostarcza jedynie informacji na temat korelacji między zmiennymi ale uzyskane w ten sposób współczynniki są zazwyczaj trudno interpretowalne.

- **Pośrednia** MNK

Próba estymacji poszczególnych równań formy strukturalnej (11.2) da w efekcie estymatory obciążone z powodu wystąpienia problemu równoczesności. Będzie on wynikiem sprzężeń zwrotnych między zmiennymi endogenicznymi. W typowym modelu strukturalnym $\boldsymbol{y}_i$ zależy od $\boldsymbol{y}_j$ i na odwrót. Jeśli będziemy szacować MNK j-te równanie układu równań (11.2) to uzyskamy równanie regresji, w którym zmienne objaśniające będą skorelowane z zaburzeniem losowym, ponieważ zmienna objaśniana y_{jt} będzie skorelowana ze zmienną objaśniającą y_{kt}, a ta z kolei będzie skorelowana z ε_{kt}, skorelowanym z ε_{jt}. Bardziej formalnie

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Cov}\left(\boldsymbol{Y}_t, \boldsymbol{u}_t^{+}\right) &= \mathrm{E}\left[\left(\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{X}_t + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{u}_t - \mathrm{E}\left(\boldsymbol{Y}_t\right)\right)\left(\boldsymbol{A}_D^{-1}\boldsymbol{u}_t - \mathrm{E}\left(\boldsymbol{u}_t^{+}\right)\right)'\right] \\
&= \mathrm{E}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{u}_t\boldsymbol{u}_t'\boldsymbol{A}_D^{-1}\right) = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}_D^{-1} \neq 0
\end{aligned}
$$

Ze tego wzoru wynika, że rozkład zmienne $(y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_G)$ będą słabo egzogeniczne względem y_j jedynie, gdy spełnione będą trzy warunki. Po pierwsze, macierz wariancji-kowariancji $\operatorname{Var}(\boldsymbol{u}_t) = \boldsymbol{\Sigma}$ musi być diagonalna. Po drugie, w poszczególnych równaniach musi występować tylko jedna zmienna egzogeniczna, tak by $\boldsymbol{A}$ była także diagonalna. Po trzecie rokład $\boldsymbol{u}_t \sim N(0, \boldsymbol{\Sigma})$ tak, by diagonalność $\boldsymbol{\Sigma}$ gwarantowała niezależność elementów $\boldsymbol{u}_t$. Estymator MNK będzie jednak nieobciążony przy znacznie słabszych warunkach. Problem równoczesności nie pojawi się, gdy po prawej stronie żadnego z równań formy (11.2) nie wystąpią zmienne endogeniczne. W takim przypadku macierz $\boldsymbol{A}$ jest diagonalna a estymator MNK jest estymatorem nieefektywnym, ponieważ nie będzie wykorzystywał informacji wynikającej z niezerowych korelacji między elementami $\boldsymbol{u}_t$.

Estymator MNK zastosowany do każdego z równań z osobna formy zredukowanej (11.3) daje więc nieefektywny ale nieobciążony estymator macierzy $\widehat{\boldsymbol{\Pi}}$. Estymatory macierzy $\widehat{\boldsymbol{A}}$ i $\widehat{\boldsymbol{B}}$ można uzyskać jeśli możliwe jest rozwiązanie układu równań $\widehat{\boldsymbol{\Pi}} = \widehat{\boldsymbol{A}}^{-1}\widehat{\boldsymbol{B}}$. Rozwiązań tych będzie nieskończenie wiele jeśli model (11.2) nie jest zidentyfikowany. Jeśli model ten jest dokładnie zidentyfikowany, to otrzymamy jednoznaczne rozwiązania dla $\widehat{\boldsymbol{A}}$ i $\widehat{\boldsymbol{B}}$. Dla modelu przeidentyfikowanego, układ równań będzie sprzeczny i otrzymamy kilka asymptotycznie równoważnych estymatorów tych samych parametrów.

Przykład 11.3 *Model podaży i popytu*

Rozważmy następujący model popytu i podaży:

$$
\begin{aligned}
Q_D &= \alpha_0 + \alpha_1 P + \alpha_2 D + u_1 \\
Q_S &= \beta_1 P + \beta_2 P_M + u_2 \\
Q_D &= Q_S
\end{aligned}
$$

gdzie Q_D i Q_S oznaczają popyt i podaż na dane dobro, P cenę danego dobra, D dochody konsumentów, a P_M ceny surowców koniecznych do produkcji danego dobra a u_1 i u_2 są zaburzeniami losowymi. Zakladamy, że w tym modelu zmiennymi endogeniczmi są Q_S, Q_D i P. Forma zredukowana tego modelu ma następujacą postać:

$$
\begin{aligned}
Q_D = Q_S &= \frac{\beta_1\alpha_0}{\beta_1-\alpha_1} + \frac{\beta_1\alpha_2}{\beta_1-\alpha_1}D - \frac{\beta_2\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1}P_M + \frac{\beta_1}{\beta_1-\alpha_1}u_1 - \frac{\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1}u_2 \qquad (11.6)\\
P &= \frac{\alpha_0}{\beta_1-\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_1-\alpha_1}D - \frac{\beta_2}{\beta_1-\alpha_1}P_M + \frac{1}{\beta_1-\alpha_1}u_1 - \frac{\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1}u_2
\end{aligned}
$$

Widać teraz, że P jest skorelowane z u_2 i tym samym przy szacowaniu zarówno równania dla Q_S i dla Q_D wystąpi problem równoczesności. Problemów takich nie sprawia forma zredukowana (11.6) ponieważ w jej przypadku po prawej stronie rówania znajdują się jedynie zmienne egzogeniczne. Bez problemu można wyszacować za pomocą MNK zastosowanego do kożdego z równań z osobna formy zredukowanej postaci:

$$
\begin{aligned}
Q_D = Q_S &= \pi_{11} + \pi_{12}D + \pi_{13}P_M + \varepsilon_1 \qquad (11.7)\\
P &= \pi_{21} + \pi_{22}D + \pi_{23}P_M + \varepsilon_2
\end{aligned}
$$

Z uzyskanych $\widehat{\pi}_{jk}$ można policzyć estymatory $\widehat{\alpha}_i$ i $\widehat{\beta}_i$ wykorzystując następujące równia implikowane *przez układ równań (11.7):*

$$\widehat{\pi}_{11} = \frac{\widehat{\beta}_1 \widehat{\alpha}_0}{\widehat{\beta}_1 - \widehat{\alpha}_1},\ \widehat{\pi}_{12} = \frac{\widehat{\beta}_1 \widehat{\alpha}_2}{\widehat{\beta}_1 - \widehat{\alpha}_1},\ \widehat{\pi}_{13} = \frac{\widehat{\beta}_2 \widehat{\alpha}_1}{\widehat{\beta}_1 - \widehat{\alpha}_1}$$

$$\widehat{\pi}_{21} = \frac{\widehat{\alpha}_0}{\widehat{\beta}_1 - \widehat{\alpha}_1},\ \widehat{\pi}_{22} = \frac{\widehat{\alpha}_2}{\widehat{\beta}_1 - \widehat{\alpha}_1},\ \widehat{\pi}_{23} = \frac{\widehat{\beta}_2}{\widehat{\beta}_1 - \widehat{\alpha}_1}$$

Powyższy układ równań jest sprzeczny, ponieważ mamy 5 niewiadomych i 6 niezależnych równań. Przekształcając te równania można pokazać, że

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\widehat{\pi}_{11}}{\widehat{\pi}_{21}},\ \widehat{\beta}_1 = \frac{\widehat{\pi}_{12}}{\widehat{\pi}_{22}},\ \widehat{\alpha}_1 = \frac{\widehat{\pi}_{13}}{\widehat{\pi}_{23}},\ \widehat{\beta}_2 = \widehat{\pi}_{23}\left(\widehat{\beta}_1 - \widehat{\alpha}_1\right),\ \widehat{\alpha}_2 = \widehat{\pi}_{22}\left(\widehat{\beta}_1 - \widehat{\alpha}_1\right),\ \alpha_0 = \widehat{\pi}_{21}\left(\widehat{\beta}_1 - \widehat{\alpha}_1\right)$$

Ponieważ dla estymtora $\widehat{\beta}_1$ uzyskaliśmy dwa różne rozwiązania, więc układ ten jest przeidentyfikowany. Jeśli model jest prawidłowo sformułowany, to $\widehat{\beta}_1 = \operatorname{plim}\left(\frac{\widehat{\pi}_{11}}{\widehat{\pi}_{21}}\right) = \operatorname{plim}\left(\frac{\widehat{\pi}_{12}}{\widehat{\pi}_{22}}\right)$. W małych próbach $\frac{\widehat{\pi}_{11}}{\widehat{\pi}_{21}} \neq \frac{\widehat{\pi}_{12}}{\widehat{\pi}_{22}}$ i powstaje problem, którą z dwóch form estymatora parametry β_1 powinniśmy wybrać.

Problem wielu form pośredniego estymatora MNK, który pojawia się w przypadku modeli przeidentyfikowanych jest powodem, dla którego ten sposob estymacji jest rzadko stosowany.

- $2MNK$

Przypomnijmy, że problemem przy szacowaniu poszczególnych równań modelu strukturalnego (11.2), jest występowanie problemu równoczesności. W przypadku, kiedy taki problem występuje, można uzyskać estymator zgodny stosując estymator MZI. Estymator MZI można zastosować do j-tego rówania modelu (11.2), gdy znamy zmienne instrumentalne, które dla danego równania spełniają założenia 8.2, 8.3 i 8.4.

Zauważmy, że zmienne z góry ustalone w modelu (11.2) spełniają warunek 8.2 i 8.4, a warunek 8.3 jest spełniony jeśli ilość zmiennych po prawej stronie równania j jest mniejsza niż całkowita ilość zmiennych z góry ustalonych modelu. Te warunek jest dokładnie równoważny warunkowi koniecznemu dla identyfikacji j-tego równania $(K \geq G_j + K_j - 1)$. Parametry zidentyfikowanych równań modelu (11.2) można więc wyznaczyć stosując MZI do każdego z tych równań z osobna.

$2MNK$ zaliczamy do metod estymacji z ograniczoną informacją, ponieważ do oszacowania równania j-tego w modelu musimy znać jedynie ograniczenia narzucone na to równania oraz wiedzieć, które zmienne w modelu są endogeniczne, a które są z góry ustalone. Nie używamy natomiast w procesie estymacji ograniczeń narzuconych na pozostałe równania. Nazwa $2MNK$ wzięła się stąd, że estymacja przy użyciu tej metody składa się z dwóch kroków:

1. obliczenia wartości teoretycznych zmiennych endogenicznych z regresji na zmiennych egzogenicznych. Są to wartości teoretyczne z modelu w formie zredukowanej (11.3).
2. wyliczenia estymatory MZI dla poszczególnych równań (11.2). Zmienne endogeniczne zastępujemy wyliczonymi w pierwszym kroku ich wartościami teoretycznymi.

Estymatory uzyskane z $2MNK$ są estymatorami nieefektywnymi, ponieważ w trakcie estymacji i-tego równania nie wykorzystują informacji wynikających z ograniczeń nałożonych na j-te równanie.

- $3MNK$

Metoda $3MNK$ jest jedną z prostszych metod estymacji wykorzystujących pełną informację. Zapiszmy model (11.2) w następujący sposób:

$$\boldsymbol{y}_j = \boldsymbol{Z}_j \boldsymbol{\beta}_j + \boldsymbol{u}_j \tag{11.8}$$

$$\mathrm{E}\left(\boldsymbol{u}_j\right) = \boldsymbol{0}, \;\; \mathrm{Var}\left(\boldsymbol{u}_j\right) = \sigma_{jj}^2 \boldsymbol{I}, \; \mathrm{Cov}\left(\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{u}_k\right) = \sigma_{jk}$$

gdzie $j, k = 1, \ldots, G$, $\boldsymbol{Z}_j$ jest macierzą tych zmiennych endogenicznych i z góry ustalonych, które występują w j-tym równaniu formy (11.2) a $\boldsymbol{\beta}_j$ jest wektorem parametrów przy tych zmiennych. Zmienne z góry ustalone w (11.2) zgromadziliśmy w macierzy $\boldsymbol{Z}$. Możemy teraz model (11.2) sformułować w sposób następujący:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \boldsymbol{Z}_2 & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \boldsymbol{Z}_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_G \end{bmatrix}$$

lub

$$\overline{\boldsymbol{y}} = \overline{\boldsymbol{Z}}\,\overline{\boldsymbol{\beta}} + \overline{\boldsymbol{u}}, \tag{11.9}$$

gdzie

$$\overline{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_G \end{bmatrix}, \overline{\boldsymbol{Z}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \boldsymbol{Z}_2 & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \boldsymbol{Z}_G \end{bmatrix}, \overline{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_G \end{bmatrix}, \overline{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_G \end{bmatrix}$$

Zauważmy, że w modelu (11.9), występuje heteroskedastyczność i autokorelacja, ponieważ

$$\mathrm{Var}\left(\overline{\boldsymbol{u}}\right) = \overline{\boldsymbol{\Sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}\boldsymbol{I} & \cdots & \sigma_{1G}\boldsymbol{I} \\ \vdots & \ddots & \\ \sigma_{G1}\boldsymbol{I} & & \sigma_{GG}\boldsymbol{I} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{I}$$

W modelu (11.9) pojawiają się dwa problemy: macierz wariancji-kowariancji jest niediagonalna, i występuje w nim problem równoczesności. W tym przypadku możemy zastosować metodę, która jest kombinacją MZI i wykonywalnej $UMNK$. Pierwsze dwa kroki estymacji tą metodą są takie same jak w przypadku $2MNK$. W pierwszym kroku liczymy wartości teoretyczne za pomocą wzoru (8.2) zastosowanego do każdego z równań (11.8)

$$\widehat{\boldsymbol{Z}}_j = \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\Pi}}_j = \boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}_j = \boldsymbol{P}_X\boldsymbol{Z}_j. \tag{11.10}$$

Oznaczmy jako $\widehat{\overline{\boldsymbol{Z}}}$ odpowiednio pogrupowane wartości teoretyczne zmiennych $\widehat{\boldsymbol{Z}}_j$

$$\widehat{\overline{\boldsymbol{Z}}} = \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{Z}}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \widehat{\boldsymbol{Z}}_2 & & \boldsymbol{0} \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & & \widehat{\boldsymbol{Z}}_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_X\boldsymbol{Z}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \boldsymbol{P}_X\boldsymbol{Z}_2 & & \boldsymbol{0} \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{P}_X\boldsymbol{Z}_G \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_X & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \boldsymbol{P}_X & & \boldsymbol{0} \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{P}_X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \boldsymbol{Z}_2 & & \boldsymbol{0} \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{Z}_G \end{bmatrix} = \left(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{P}_X\right)\overline{\boldsymbol{Z}}$$

W drugim kroku, liczymy dla kolejnych równań estymatory b_{2MNK}, które zapisane łącznie jednym wektorem są dane wzorem

$$\boldsymbol{b}_{2MNK} = \left(\widehat{\overline{\boldsymbol{Z}}}'\widehat{\overline{\boldsymbol{Z}}}\right)^{-1}\widehat{\overline{\boldsymbol{Z}}}'\overline{\boldsymbol{y}} = \left(\overline{\boldsymbol{Z}}'\left(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{P}_X\right)\overline{\boldsymbol{Z}}\right)^{-1}\overline{\boldsymbol{Z}}'\left(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{P}_X\right)\overline{\boldsymbol{y}}$$

Dla każdego z policzonych równań liczymy reszty, które wykorzystujemy do policzenia estymatora macierzy wariancji kowariancji $\boldsymbol{\Sigma}$, ze wzoru

$$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{ij} = \widetilde{\sigma}_{ij} = \frac{\widetilde{\boldsymbol{e}}_i'\widetilde{\boldsymbol{e}}_j}{T} \tag{11.11}$$

W trzecim kroku liczymy estymator $3MNK$ jako wykonywalny estymator $UMNK$ zastosowany do zmiennych teoretycznych $\widehat{\overline{\boldsymbol{Z}}}$ i przy zastosowaniu estymatora $\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ wyliczonego na podstawie wzoru 11.11

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b}_{3MNK} &= \left(\widehat{\overline{\boldsymbol{Z}}}'\widehat{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}}^{-1}\widehat{\overline{\boldsymbol{Z}}}\right)^{-1}\widehat{\overline{\boldsymbol{Z}}}'\widehat{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}}^{-1}\overline{\boldsymbol{y}} \\
&= \left(\left[(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{P}_X)\overline{\boldsymbol{Z}}\right]'\left(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}\otimes\boldsymbol{I}\right)^{-1}\left[(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{P}_X)\overline{\boldsymbol{Z}}\right]\right)^{-1}\left[(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{P}_X)\overline{\boldsymbol{Z}}\right]'\left(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}\otimes\boldsymbol{I}\right)^{-1}\overline{\boldsymbol{y}} \\
&= \left(\overline{\boldsymbol{Z}}'\left(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\otimes\boldsymbol{P}_X\right)^{-1}\overline{\boldsymbol{Z}}\right)^{-1}\overline{\boldsymbol{Z}}'\left(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}\otimes\boldsymbol{P}_X\right)^{-1}\overline{\boldsymbol{y}}
\end{aligned}$$

$3MNK$ zaliczamy do metod pełnej informacji, ponieważ estymatory uzyskane ze wzoru (11.11) wykorzystują wszystkie ograniczenia implikowane przez formę strukturalną (11.1).

- $LIVE$ **i** $FIVE$

We wzorze na estymator $3MNK$ wykorzystujemy dwie wyestymowane wcześniej macierze: macierz $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$ i macierz wartości teoretycznych $\widehat{\boldsymbol{Z}}$. Jak wynika ze wzoru (11.10) do policzenia $\widehat{\boldsymbol{Z}}$ potrzebne nam jest oszacowanie $\widehat{\boldsymbol{\Pi}}$. $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$ można oszacować za pomocą reszt z $2MNK$ można jednak użyć także reszt z $3MNK$. Podobnie $\widehat{\boldsymbol{\Pi}}$ można oszacować za pomocą MNK można jednak do tego wykorzystać także wzór $\widehat{\boldsymbol{\Pi}} = \widehat{\boldsymbol{A}}^{-1}\widehat{\boldsymbol{B}}$ i wykorzystać jakieś wcześniej uzyskane estymatory $\widehat{\boldsymbol{A}}^{-1}$ i $\widehat{\boldsymbol{B}}$. Postępując w ten sposób i wykorzystując wzór

$$\boldsymbol{b} = \left(\widehat{\overline{\boldsymbol{Z}}}'\widehat{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}}^{-1}\widehat{\overline{\boldsymbol{Z}}}\right)^{-1}\widehat{\overline{\boldsymbol{Z}}}'\widehat{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}}^{-1}\overline{\boldsymbol{y}} \tag{11.12}$$

gdzie $\widehat{\boldsymbol{Z}}_j = \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\Pi}}_j$ a $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{ij} = \widehat{\sigma}_{ij} = \frac{\widehat{\boldsymbol{e}}_i'\widehat{\boldsymbol{e}}_j}{T}$ otrzymujemy następującą tabelę opisującą możliwe warianty estymacji parametrów równania strukturalnego.

Metoda	Wejściowa $\boldsymbol{\Sigma}$	Wejściowa $\boldsymbol{\Pi}$	Wyjściowa $\boldsymbol{\Sigma}$	Wyjściowa $\boldsymbol{\Pi}$
MNK			$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{MNK}$	$\widehat{\boldsymbol{\Pi}}_{MNK}$
$2MNK$	$\boldsymbol{I}$	$\widehat{\boldsymbol{\Pi}}_{MNK}$	$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{2MNK}$	$\widehat{\boldsymbol{\Pi}}_{2MNK}$
$3MNK$	$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{2MNK}$	$\widehat{\boldsymbol{\Pi}}_{MNK}$	$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{3MNK}$	$\widehat{\boldsymbol{\Pi}}_{3MNK}$
$LIVE$	$\boldsymbol{I}$	$\widehat{\boldsymbol{\Pi}}_{2MNK}$	$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{LIVE}$	$\widehat{\boldsymbol{\Pi}}_{LIVE}$
$FIVE$ po $2MNK$	$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{2MNK}$	$\widehat{\boldsymbol{\Pi}}_{2MNK}$	$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{FIVE1}$	$\widehat{\boldsymbol{\Pi}}_{FIVE1}$
$FIVE$ po $3MNK$	$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{3MNK}$	$\widehat{\boldsymbol{\Pi}}_{3MNK}$	$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{FIVE2}$	$\widehat{\boldsymbol{\Pi}}_{FIVE2}$
$FIVE$ po $LIVE$	$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{LIVE}$	$\widehat{\boldsymbol{\Pi}}_{LIVE}$	$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{FIVE3}$	$\widehat{\boldsymbol{\Pi}}_{FIVE3}$

Przez wejściowe $\boldsymbol{\Pi}$ rozumiemy macierz wykorzystywaną w danej metodzie do generowania $\widehat{\overline{\boldsymbol{Z}}}$, a przez wejściowe $\boldsymbol{\Sigma}$ macierz służącą do stworzenia macierzy $\widehat{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}}$ występującej we wzorze (11.12). Wyjściowe $\boldsymbol{\Sigma}$ jest równe $\widehat{\boldsymbol{A}}^{-1}\widehat{\boldsymbol{B}}$ dla estymatorów $\widehat{\boldsymbol{A}}$ i $\widehat{\boldsymbol{B}}$ uzyskanych z danej metody a wyjściowa $\boldsymbol{\Sigma}$ jest liczona na podstawie reszt dla formy strukturalnej wyestymowanej w danej metodzie.

Estymatory te można dalej ulepszać tworząc np. estymator $FIVE$ po $FIVE$. Pokazano, że iterowany w ten sposób estymator $FIVE$ zbiega do estymatora $FIML$.

Przykład 11.4 *Estymator SUR (Seemingly Unrelated Regressions). W modelu 11.9 nie pojawi się problem równoczesności, gdy w każdym z równań (11.8) po prawej stronie występować będą jedynie zmienne egzogeniczne. Do szacowania takiego modelu można zastosować estymator $UMNK$ postaci*

$$\boldsymbol{b}_G = \left(\overline{\boldsymbol{Z}}'\widehat{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}}^{-1}\overline{\boldsymbol{Z}}\right)^{-1}\overline{\boldsymbol{Z}}'\widehat{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}}^{-1}\overline{\boldsymbol{y}}$$

Nieznaną macierz $\widehat{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}}$ można oszacować estymując MNK poszczególne równania (11.9) i szacując *macierz $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$ na podstawie wzoru*

$$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{jk} = \widehat{\sigma}_{jk} = \frac{\boldsymbol{e}_j' \boldsymbol{e}_k}{T} \tag{11.13}$$

gdzie a $\boldsymbol{e}_j$ oznacza wektor reszt z j-tego równania. Wykonywalny estymator $UMNK$ będzie miał w tym przypadku następującą postać

$$\boldsymbol{b}_G = \left(\overline{\boldsymbol{Z}}' \left(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}} \otimes \boldsymbol{I} \right)^{-1} \overline{\boldsymbol{Z}} \right)^{-1} \overline{\boldsymbol{Z}}' \left(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}} \otimes \boldsymbol{I} \right)^{-1} \boldsymbol{y}$$

- $FIML$

Wszystkie nowsze pakiety statytyczne umożliwiają estymacje modelu (11.2) za pomocą Metody Największej Wiarygodności przy pełnej informacji (**F**ull **I**nformation **M**aximum **L**ikelihood). Do tego celu zakładamy, że błędy losowe w modelu mają rozkład normalny $\boldsymbol{u} \sim N\left(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}\right)$, formułujemy funkcję wiarygodności i maksymalizujemy ją za pomocą metod numerycznych. Uzyskane w ten sposób estymatory będą miały typowe własności estymatorów MNW, to znaczy w przypadku prawdziwości przyjętych założeń, będą zgodne i asymptotycznie efektywne. Ponieważ do sformułowania estymatora $FIML$ wykorzystujemy całą formę strukturalną (11.2) metodę tę zaliczamy do metod pełnej informacji.

- $LIML$

Wariantem estymatora $FIML$ jest estymator $LIML$ (**L**imited **I**nformation **M**aximum **L**ikelihood). Estymator $LIML$ stosujemy, gdy wiemy, które zmienne w modelu są egzogeniczne oraz znamy formę strukturalną części równań. Pozostałe równania formy strukturalnej zastępujemy wtedy odpowiednimi równaniami pochodzącymi z formy zredukowanej i do otrzymanego modelu stosujemy estymator $FIML$. Zauważmy, że uzyskany w ten sposób estymator $LIML$ jest równoważny estymatorowi $FIML$ pod warunkiem, że równania, które zastępujemy równaniami pochodzącymi z formy zredukowanej, są dokładnie zidentyfikowane. Metodę tą zaliczamy do metod niepełnej informacji, ponieważ do estymacji parametrów równania j nie jest konieczne wyspecyfikowanie pełnej postaci formy strukturalnej.

Literatura: Steward (1991) str. 246-288, Green (1997) str. 708-761, Chow (1995) str. 144-156 i 191-219, Goldberger (1972) 368-450, Theil (1979) str. 435-466 i 492-523, Doornik i Hendry (1997) str. 239-241.